LA TEORÍA DE JUEGOS

VON NEUMANN

Piedra, papel, teorema



NATIONAL GEOGRAPHIC

JOHN VON NEUMANN es uno de los matemáticos más destacados de la edad contemporánea. Dio a luz la teoría de juegos, un área de las matemáticas que ha encontrado aplicaciones en ámbitos tan diversos como la política, la economía y la biología; ideó la arquitectura de los ordenadores actuales, y suya es la axiomatización de la mecánica cuántica sobre la que se sustentan las interpretaciones modernas de esta teoría fundamental. Considerado por muchos de sus contemporáneos como el intelecto más brillante del siglo XX, emigró de su Hungría natal a Estados Unidos y, tras la anexión rusa de su país, se implicó profundamente en la lucha contra con el comunismo hasta el punto de poner su genio al servicio del programa atómico estadounidense e incluso abogar por un bombardeo nuclear preventivo.

LA TEORÍA DE JUEGOS

VON NEUMANN

Piedra, papel, teorema

NATIONAL GEOGRAPHIC

ENRIQUE GRACIÁN RODRÍGUEZ es licenciado en Ciencias Exactas y periodista científico. Su trabajo se centra en la divulgación científica, colaborando en diversos medios de comunicación, y en la didáctica de las matemáticas.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Academia de Ciencias de Hungría: 30; Archivo RBA: 21, 29ai, 29ad, 39, 43, 49b, 57; Archivos Nacionales de los Estados Unidos: 105; Archivos Nacionales del Reino Unido: 125; Corbis: 159a; Cordon Press: 71, 75b, 123a; Departamento de Defensa de los Estados Unidos: 135; Ejército de los Estados Unidos: 123b; Both Elöd: 75ad; Fuerza Aérea de los Estados Unidos: 79; Genesis Prosthetics: 154; Getty Images: 75ai, 98, 137, 159b; Gobierno de Estados Unidos: 122; Jakub Hałun: 145; Instituto Ludwig von Mises: 94; Konrad Jacobs/MFO: 146; Kurt Gödel Papers/Institute for Advanced Study: 61; Laboratorio Nacional de Los Álamos: 49ad; National Portrait Gallery: 49ai; Open Library: 27; Oskay: 150; Jon Sullivan: 141; VinceB: 29b; Adalbert von Rössler: 25; James E. Westcott/Museo Americano de Ciencia y Energía: 119; Elke Wetzig: 83.

ISBN: 978-84-473-7675-9
Depósito legal: B-13292-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

¿Quién era John von Neumann? Si para responder a esta pregunta nos remitimos a la certificación académica, podemos afirmar que Von Neumann era matemático, pues consta que el 12 de marzo de 1926 se doctoró en dicha ciencia en la Universidad de Budapest con la calificación de *summa cum laude*. También podríamos decir que era químico, dado que en 1925 obtuvo la titulación de ingeniero químico en la Escuela Politécnica Federal de Zúrich. Hay un dicho popular que dice «por sus obras lo conoceréis». Si aplicamos esta máxima a las obras de Von Neumann, el abanico de posibilidades se abre notablemente, ya que entre sus obras hay que contar con una diversidad importante de campos científicos. Sus aportaciones al álgebra, la topología y el análisis funcional le definen como un matemático puro, y el establecimiento de las bases matemáticas de lo que hoy se conoce como «teoría de juegos», lo distinguen como uno de los mayores impulsores de lo que actualmente llamamos «matemática aplicada». Como matemático, nadie duda en calificarlo como uno de los más importantes del siglo XX. Es más, se dice de él que probablemente fue el último de los matemáticos que alcanzó a tener una visión completa de todas las matemáticas.

Sin embargo, si nos atenemos a considerar a Von Neumann como el creador de los espacios de Hilbert, que proporcionaron a la mecánica cuántica un formalismo riguroso, incluyendo

como casos particulares en una sola teoría las dos tendencias que existían en la década de 1920 —la interpretación ondulatoria de Schrödinger y la matricial de Heisenberg—, estamos ante un eminente físico teórico. Buena muestra de ello es que su libro *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* es uno de los grandes pilares en los que se apoya la física cuántica.

Si le preguntáramos a un economista si sabe quién era Von Neumann, la respuesta sería rotundamente afirmativa en la mayoría de los casos, pues se pueden contar por miles los economistas que trabajan cada día en teoría de juegos después de la publicación de *Teoría de juegos y comportamiento económico*, que escribió Von Neumann en colaboración con el matemático y economista alemán Oskar Morgenstern. Además, Von Neumann marcó un hito en la historia de la economía cuando en 1937 publicó *The Model of General Economic Equilibrium*, considerado como el artículo más importante sobre economía matemática que se había escrito hasta entonces.

«¿Von Neumann? Es el padre de la computación actual», nos respondería un informático. «Tuvo una idea genial», continuaría diciendo. En las primeras computadoras que se construyeron, cambiar de programa significaba cambiar físicamente los componentes electrónicos para distribuirlos de otra forma. Von Neumann ideó una arquitectura especial gracias a la cual cualquier programa podía ser rediseñado en la misma memoria de la máquina. Actualmente, todos los ordenadores funcionan según la arquitectura de Von Neumann, y también fue el primero en diseñar la computación en paralelo.

¿Pero Von Neumann no era un experto en cibernética? Sí, cierto, fue pionero en aplicar la combinatoria, la lógica matemática y la teoría de la información al diseño de autómatas artificiales, asentando bases firmes para el desarrollo de la IA (Inteligencia Artificial). Y de paso, también creó los primeros modelos de máquinas autorreplicantes, es decir, capaces de generar por sí mismas máquinas cada vez más complejas.

También es obligado incluir en esta larga lista de titulaciones y logros al Von Neumann estratega militar, pues colaboró intensamente con el Departamento de Defensa de Estados Unidos, esta-

bleciendo matemáticamente las estrategias básicas de la Guerra Fría, aportando ideas que, actualmente, son ya de manual en este tipo de operaciones.

Podríamos concluir que Von Neumann tenía una «mente renacentista», que define el perfil de un científico, así, sin más. Pero esto no sería del todo cierto, ya que en física, en economía, en cibernética o en estrategia militar, Von Neumann actuó siempre como matemático, buscando las estructuras básicas en las que se fundamentaban cada una de estas disciplinas y dejando en ellas la impronta matemática que les permitiría alcanzar el rango de ciencia, transformando así las matemáticas puras en matemáticas aplicadas.

En la mayoría de las fotografías que se conservan de Von Neumann lo vemos casi siempre de pie, hablando con alguien, escribiendo en una pizarra, junto a una computadora... Los pies de foto refuerzan la idea de que en el momento en que el fotógrafo captó la imagen, Von Neumann estaba de paso. Siempre había alguien que le estaba esperando. Se dirigía caminando a otro departamento del edificio, iba en coche a otra ciudad, en avión a otro estado e incluso a otro continente. Von Neumann estaba siempre en constante movimiento. Esta es quizá la característica que define mejor su personalidad. Su deambular por el mundo era reflejo de su viaje interior. Los departamentos, los edificios, las personas, eran escenarios en los que había algún problema que resolver, y a los que volvía una y otra vez. En este sentido, para Von Neumann las matemáticas no fueron un fin en sí mismas, sino la llave que le daba acceso a los múltiples parajes de la ciencia.

En la biografía de Von Neumann se puede establecer una línea divisoria, tanto en la manera de vivir, como en el tipo de actividad científica que llevó a cabo. Se trata de una línea imaginaria que cruza el Atlántico y que separa Europa de Estados Unidos. Aun sabiendo que es una simplificación excesiva, se podría decir que Europa fue el escenario en el que Von Neumann se dedicó a las matemáticas puras, mientras que en Estados Unidos sus esfuerzos estuvieron dirigidos a las matemáticas aplicadas.

A principios del siglo xx, la ciencia había sufrido una transformación profunda que supuso un cambio de paradigma. La teoría

de la relatividad y el nacimiento de la física cuántica abrieron las puertas al universo de las partículas elementales. Romper un átomo, fisionar su núcleo, aparecía como una posibilidad real. Pero esto, a su vez, trajo consigo un nuevo concepto de lo que era la investigación científica. Ya no se trataba de un reducido número de personas trabajando en un pequeño laboratorio con un presupuesto relativamente bajo. Ahora había que construir grandes edificios capaces de albergar un acelerador de partículas o un reactor nuclear, contar con el concurso de cientos de científicos y técnicos llevando a cabo conjuntamente un mismo proyecto. Además, por primera vez en la historia, se hacía necesario contar con inversiones millonarias para desarrollar un experimento de física fundamental.

Sin embargo, por desgracia, también se dio la circunstancia de que este experimento de fisión, sin duda el más ambicioso que se había propuesto nunca la comunidad científica, acontecía en un escenario bélico, en el que estaban en juego no solo la validez de hipótesis científicas, sino también la vida de las personas. Y esta es una de las facetas más criticadas de la actividad científica de Von Neumann, que se corresponde con el período de su estancia en Estados Unidos. El gran matemático húngaro puso sus conocimientos al servicio de la fabricación de la primera bomba atómica, e hizo realidad la bomba termonuclear de fusión, el dispositivo con mayor capacidad de destrucción jamás fabricado por el hombre.

Es indudable que las dramáticas circunstancias en que se vio inmersa la sociedad civil a causa de la Segunda Guerra Mundial ejercieron una clara influencia, no solo en Von Neumann, sino también en la mayoría de los científicos que se vieron implicados, voluntaria o involuntariamente, en la aplicación de sus conocimientos a la industria bélica.

Siempre ha sido un tema controvertido el calibrar la responsabilidad de un científico frente a las posibles consecuencias sociales y políticas que sus investigaciones puedan traer, consecuencias que solo inciden en nuestra realidad cotidiana en el momento en que la ciencia se convierte en tecnología. Pero también es cierto que en la investigación atómica en la que Von Neumann

estuvo tan implicado, la barrera que separa ciencia y tecnología era realmente difusa. En este sentido, Von Neumann declaró en una ocasión que una persona no tenía por qué sentirse responsable de la época y de la sociedad que le habían tocado vivir.

También se ha dicho de Von Neumann que tenía una tendencia política de extrema derecha, dada su manifiesta oposición a la Unión Soviética y al expansionismo de las ideologías comunistas, una animadversión que probablemente se forjó en sus años de juventud, en la Hungría convulsionada por la época del político comunista húngaro Béla Kun y por el hecho de ser judío y haber heredado el temor de generaciones perseguidas por el antisemitismo ruso. Lo que sí parece cierto es que fue proclive a alinearse en el bando de los «halcones», implicándose plenamente en el estamento militar, y también lo es que en circunstancias críticas podía dejar a un lado sus favoritismos políticos y dar la cara por un amigo, como quedó de manifiesto cuando, en plena caza de brujas, Robert Oppenheimer, el director científico del Proyecto Manhattan, fue llevado ante el Comité de Actividades Antiamericanas. Von Neumann, poniendo en riesgo su reputación, acudió voluntariamente para testificar en favor de su inocencia y de su lealtad.

La personalidad de los grandes genios suele ser motivo de controversias. Sus relaciones con el entorno, en especial con los seres más próximos, no se ajustan a los patrones habituales. Von Neumann aborrecía algunos sentimentalismos, a los que consideraba como una pérdida de tiempo. Esto no significa que fuera ajeno a las circunstancias que le rodeaban, ni mucho menos insensible a aquello que pudiera afectar a sus seres queridos. No disponía de demasiado tiempo para su familia y probablemente no manifestaba hacia ellos, ni hacia nadie, lo que se podría entender como un afecto «normal». No obstante, fue atento y, a su manera, cariñoso con sus seres allegados. Incluso se puede hablar de una vertiente romántica. La lectura de la correspondencia que Von Neumann mantuvo con Klara Dan, su segunda mujer, denota una naturaleza apasionada y turbulenta. Si leyéramos esas cartas sin conocer nada de la biografía de su autor, pensaríamos que fueron escritas por un músico, un pintor o un poeta, enamorado de una mujer a la que cabría calificar cuanto menos de difícil.

Von Neumann era un genio, y los genios suelen marcar un hito, pero en este caso fueron varios los hitos: en matemáticas, en física, en teoría de juegos, en estrategias militares, en teoría de autómatas, en lógica, en informática. En este sentido fue un cazador nato: allí donde olía la presa se lanzaba con todo su arsenal, y si las armas de las que disponía no eran las adecuadas, creaba otras nuevas. Pero de toda esa frenética actividad acabó destilando un perfil científico, que iba más allá del físico, del informático o del estratega, ya que la presa era siempre un problema sin resolver, e ir a la caza de problemas sin resolver es lo que caracteriza la naturaleza de un matemático puro.

1903 Nace en Budapest, Hungría, el 28 de diciembre, Margitta Neumann János (John von Neumann), primer hijo de Miksa Neumann y Margaret Kann.

1911 Inicia los estudios de secundaria en el Instituto Luterano de Budapest.

1922 Junto con su tutor, Michael Fekete, publica su primer artículo matemático.

1925 Obtiene el título de ingeniero químico en Zúrich. Realiza una tesis doctoral sobre la axiomatización de la teoría de conjuntos.

1926 Ingresa en la Universidad de Gotinga, donde colabora con David Hilbert.

1928 Publica «Sobre la teoría de los juegos de sociedad», el primer artículo sobre teoría de juegos.

1929 Se casa con Mariette Koevesi.

1930 Trabaja como profesor visitante en la Universidad de Princeton.

1933 Es nombrado profesor del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y contratado como *Privatdozent* en la Universidad de Viena.

1935 Nace su hija Marina.

1937 Adquiere la nacionalidad estadounidense y se divorcia de Mariette. Al año siguiente se casa con Klara Dan.

1943 Es contratado en el Laboratorio Científico de Los Álamos.

1944 Se publica la primera edición de su libro *Theory of Games and Economic Behavior* («Teoría de juegos y conducta económica»).

1947 El presidente Truman le concede la medalla al Mérito y la Fuerza Naval la medalla a los Servicios Civiles Distinguidos.

1948 Entra a formar parte como asesor en la corporación RAND (Research ANd Development).

1951 Se publica la «Teoría general y lógica de los autómatas». Es nombrado presidente de la Sociedad Matemática Americana (AMS).

1952 Jura el cargo en la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos.

1955 Se le diagnostica un cáncer de huesos que al año siguiente provoca su incapacidad.

1956 El presidente Eisenhower le impone la *Medal of Freedom* (medalla de la Libertad). Recibe el premio Enrico Fermi de Ciencia. Es internado en el hospital militar Walter Reed de Washington.

1957 Muere en Washington, el 8 de febrero, a la edad de cincuenta y tres años.

CAPÍTULO 1

Hungría: el nacimiento de un matemático

A edades muy tempranas Von Neumann puso de manifiesto las cualidades que caracterizan a un niño prodigio, como la facilidad para los idiomas o la memoria fotográfica. Y nada más alcanzar la edad adulta, en sus primeros años como universitario, publicó su primer trabajo matemático, un resultado que le valió la admiración y el reconocimiento académico y que sería el inicio de un prestigio internacional en constante aumento.

En 1867, Francisco José I fue coronado emperador de Austria y rey de Hungría. Ese mismo año firmó con los húngaros un tratado en el que les garantizaba un razonable nivel de autonomía. Hungría tenía un pasado histórico con la suficiente entidad política y cultural como para suponer una clara amenaza a la unidad nacional austriaca, por lo que en el tratado quedaron excluidos los ministerios del Ejército y el de Asuntos Exteriores, dos importantes órganos de poder que quedaban fuera del control húngaro y que sin duda mermaban su independencia como estado. Aun así, los húngaros no pusieron objeciones a una alianza con Austria que les garantizaba la necesaria protección frente al expansionismo ruso, por el que siempre se habían visto amenazados.

Por aquel entonces, los círculos de influencia del poder del Imperio austrohúngaro se concentraban en la corte de Viena, una corte que intentaba hacer prevalecer la unidad nacional basándola en la cultura magiar, algo que era complicado frente a la profusión de etnias que no tenían como idioma el magiar y entre las que se encontraban croatas, serbios, rusos, eslovacos. La población era mayoritariamente de origen judío.

A finales del siglo XIX, Hungría todavía no se había desprendido de sus estructuras feudales y se sustentaba en una economía básicamente agrícola. La llegada de la industrialización trajo consigo la inevitable concentración de recursos en las grandes capita-

les. Gran parte del campesinado hacía todo lo posible para poder emigrar a la capital, Budapest, siempre con la esperanza de mejorar su nivel de vida y, sobre todo, de proporcionar a sus hijos una educación, acorde con los tiempos, que les permitiera alcanzar una posición social que a ellos les había sido vedada. El avance tecnológico y cultural fueron determinantes para modificar la estructura social. En las viejas costumbres heredadas del feudalismo, detentar una posición social ventajosa era algo que solo podía obtenerse a través de las herencias. En cambio, los estudios, ya fueran en el campo de la ciencia o de la tecnología, posibilitaban alcanzar un estatus social razonable por méritos propios. En este sentido, la población que se mostraba más activa era la judía, que, en Budapest, superaba ampliamente a la magiar.

La construcción de fábricas en las afueras de Budapest creó un cinturón industrial que atrajo así a un campesinado muy empobrecido que acabaría por convertirse en la clase obrera, una clase también empobrecida, pero con una diferencia sustancial importante: hasta entonces, el campesino había sido siempre un vasallo de la corte feudal vienesa, pero ahora el obrero era un ciudadano que, aunque perteneciera a un bajo estrato social, podía empezar a reivindicar unos derechos en los que antes ni siquiera se le hubiera ocurrido pensar. Por otro lado, la aparición de profesiones liberales, inevitable en todo desarrollo industrial, también colaboró a transformar profundamente el tejido social. Ingenieros, arquitectos, médicos, abogados, periodistas, presionaron para que el conjunto de la sociedad fuera abandonando las viejas estructuras que frenaban su desarrollo. La corte de Viena, que seguía anclada en sus fiestas y en su boato, empezó a mirar con cierto recelo todas estas transformaciones, un recelo que pronto dejaría paso al miedo, ya que la vieja aristocracia vienesa no solo era incapaz de cambiar su estructura social, sino que además veía cómo se empobrecía día a día debido a la creciente falta de recursos económicos. Todo esto acabó por generar un caldo de cultivo en el que nacieron tensiones sociales difíciles de gestionar y en el que una ideología socialista incipiente acabaría abriéndose paso, alterando de forma convulsa la relativa paz en la que hasta entonces Hungría había avanzado política y culturalmente.

LA FAMILIA NEUMANN

Buda, Óbuda y Pest fueron las tres ciudades que acabaron convirtiéndose en la capital de Hungría. Buda significa «agua», y seguramente la ciudad adoptó este nombre debido a la majestuosa presencia del Danubio. Pest significa «horno», y lo más probable es que hiciera referencia a las numerosas fuentes termales que hay en esa ciudad. La unificación oficial de las tres ciudades tuvo lugar por real decreto en 1873, y fue a partir de entonces que la capital de Hungría pasó a llamarse Budapest.

> «En matemáticas no entiendes las cosas, simplemente te acabas acostumbrando a ellas.»
>
> — John von Neumann.

Aun así, los habitantes de la capital seguían refiriéndose indistintamente a Buda y a Pest, si bien no como ciudades distintas, sí como barrios claramente diferenciados. Buda, situada sobre una altiplanicie en la orilla izquierda del Danubio, con un gran castillo y multitud de construcciones renacentistas y barrocas, acabó configurándose como la parte antigua de la ciudad, la zona señorial en la que la gente adinerada construía sus residencias de verano. Pest era la otra cara de la moneda, una ciudad moderna en rápido desarrollo, presidida por el gran edificio del Parlamento, sede de la burocracia húngara, en la que se habían afincado bancos y comercios y con una oferta cultural en constante crecimiento.

A finales del siglo XIX, la región en la que se encontraba Pest se había convertido en uno de los centros molineros más importantes de toda Europa. Jakab Kann, descendiente de una familia judía que había emigrado a Hungría procedente de Bohemia, vio una oportunidad de negocio en abastecer de útiles a esta industria molinera y amasó una pequeña fortuna fabricando ruedas de molino, lo que le permitió comprar una casa en Pest, en la ribera del Danubio, y otra en Buda, para pasar la época estival. La casa que hizo construir en Pest, en el número 62 de la calle Vaci–Körut, era una finca de cuatro plantas. En la planta baja estableció las oficinas de

su floreciente negocio y habilitó la primera para vivir con su familia. Las dos plantas superiores las reservó como dote para sus dos hijas. Jakab Kann era un patriarca judío en el sentido más tradicional y quería a toda la familia unida bajo el mismo techo.

Margaret Kann, la hija mayor de Jakab Kann, se prometió con Miksa Neumann, un prominente abogado judío que se transformó en banquero y que cuando se casó ya ostentaba el cargo de director del Jelzáloghitel Hitelbank, una entidad financiera ubicada en Pest. Jakab Kann le regaló al joven matrimonio el cuarto piso de la casa. El tercero ya había sido ocupado por la familia de su hermana, de manera que, tal y como había planeado el abuelo Jakab, vivían todos juntos en una misma casa formando, según los testimonios de sus diferentes miembros, una familia muy bien avenida.

Y fue en este país, en esta ciudad y en este cálido ambiente de una familia judía, que nació János, el primogénito de la familia Neumann, el 28 de diciembre de 1903. Cuatro años más tarde nació su hermano Mihály y en 1911, Nicholas, su otro hermano. El nombre completo de János era Margitta Neumann János —era costumbre anteponer los apellidos al nombre de pila—, nombre que sufriría algunos cambios hasta adquirir la forma en que lo conocemos actualmente.

El *boom* cultural que sacudió a Hungría a finales del siglo XIX trajo como consecuencia la aparición de una «meritocracia». Un sector significativo de la población empezó a reivindicar los méritos alcanzados por el esfuerzo en el trabajo y la adquisición de elementos culturales progresistas, lo que hizo que la aristocracia vienesa se sintiera amenazada por un incipiente radicalismo al que solo podía oponerse aumentando su poder económico. Una de las pocas maneras que tenía de conseguirlo era poner a la venta títulos nobiliarios, algo que consiguió pese a la fuerte oposición de la vieja aristocracia, que no veía con buenos ojos que sus nobles apellidos se convirtieran en objetos de compra y venta. Así las cosas, a principios del siglo XX las opciones para la alta burguesía húngara eras dos: o se unía a los movimientos radicales que pugnaban por las reformas sociales, o bien buscaba cobijo en la aristocracia vienesa para utilizar los privilegios de los que toda-

«EL ARTE DE LA FUGA»

El abuelo de John Von Neumann era un gran aficionado a la música y una de las pocas personas que en aquella época poseía un gramófono. Era costumbre en las familias burguesas de la época formar, en la medida de lo posible, una pequeña orquesta de cámara familiar. El joven János aprendió a tocar el violín y aunque con los años abandonó este instrumento, nunca perdió su afición por la música. Una de las obras musicales que más interesó a Von Neumann fue *El arte de la fuga,* un conjunto de catorce fugas y cuatro cánones compuestos por Johann Sebastian Bach con el ánimo de ejemplificar las técnicas del contrapunto. Originalmente, fueron creadas sin responder a un orden particular y sin la asignación de un instrumento concreto. Esto, al parecer, impresionó vivamente al joven János, que debió ver en esta obra un proceso de abstracción dentro de la misma música. Según testimonia su hermano Nicholas, *El arte de la fuga* de Bach fue la fuente de inspiración para que años más tarde Von Neumann pensara en la posibilidad de que un ordenador no tuviera un programa previo asignado, lo que le llevó a diseñar la arquitectura de ordenadores que lleva su nombre.



Manuscrito de una partitura de *El arte de la fuga*, de Johann Sebastian Bach.

vía gozaba. Poseer uno de esos títulos nobiliarios conllevaba un desembolso económico importante, ya que eran muy caros, pero también suponían una buena inversión, especialmente para aquellos que se movían en sectores de influencia, como era el caso del padre de Von Neumann, Miksa Neumann. De esta manera, a partir

de 1913, Miksa Neumann adquirió el título nobiliario de «von» («de»), que se ponía de manifiesto al añadir una «i» al final del apellido, con lo que Margitta pasó a ser Margittai. Así, el nombre completo de su primogénito era ya por entonces Margittai Neumann János. John fue el nombre de pila que Von Neumann adoptó cuando adquirió la nacionalidad estadounidense, y así fue cómo Margitta Neumann János acabó llamándose John von Neumann.

LA INFANCIA DE JÁNOS

János pasó su infancia rodeado de niños, todos ellos hermanos o primos hermanos, que vivían en el mismo edificio, compartiendo comidas, juegos y celebraciones. Es probable que de no ser así, János, como tantos niños superdotados, hubiera desarrollado un carácter taciturno y excesivamente hermético. La vertiente extraordinariamente sociable que Von Neumann manifestó de adulto se forjó sin duda en este ambiente familiar tan próximo, lo que no quiere decir que la suya fuera una personalidad abierta y comunicativa. En la mente de János, siempre activa, quedaba poco espacio para las manifestaciones efusivas, lo que hizo que fuera considerado como un niño un tanto altivo y distante. Su sociabilidad era aprendida y resultado de un proceso de adaptación del que siempre solía salir airoso. Su madre cuenta la anécdota de que en una ocasión en que ella estaba sentada junto a una ventana, con la mirada perdida y el ceño fruncido, János se acercó a ella y en lugar de intentar averiguar cuál era su motivo de preocupación, le preguntó: «¿Qué estás calculando?».

En aquella casa se hablaban varios idiomas. Todas las gobernantas que habían tenido hablaban francés o inglés. El conocimiento de idiomas ha sido siempre un requisito importante en la comunidad judía, ya que en cualquier momento se podían ver obligados a emigrar a otro país, pero incluso en circunstancias normales, idiomas como el alemán se consideraban imprescindibles, ya que, para determinados sectores de la sociedad húngara, Alemania era uno de los destinos prioritarios si se pretendían al-

canzar determinados niveles profesionales y sociales. Esto sin olvidar las lenguas muertas, por las que Miksa Neumann sentía una especial devoción. En aquella época, el latín era asignatura obligatoria en la enseñanza secundaria, así como el griego, que se empezaba a estudiar a la edad de catorce años, pero gracias a las enseñanzas de su padre, János era capaz de hacer chistes en griego clásico con tan solo seis años. De esta manera, no es sorprendente que, con una mente privilegiada como la suya y estando en un ambiente tan favorable, Von Neumann mostrara una gran facilidad para los idiomas: de mayor hablaba húngaro, que era su lengua materna, alemán, inglés, francés y, por supuesto, latín y griego. En más de una ocasión, Von Neumann hizo referencia a la importancia de haber aprendido estas lenguas muertas, que le ayudaron a comprender mejor cuál debía ser la estructura interna del lenguaje de las computadoras.

> «No tiene sentido ser preciso cuando no sabes ni siquiera de lo que hablas.»
>
> — John von Neumann.

Lo que sí podría parecer sorprendente es que en las fiestas navideñas se cantaran canciones populares alemanas junto a un árbol de Navidad. Sorprendente, porque se trataba de una fiesta pagana en la que la comunidad judía no participaba. Aunque el abuelo Jakab Kann era un hombre devoto que cumplía religiosamente con los ritos del judaísmo, el espíritu religioso se había ido debilitando en las sucesivas generaciones. János no tuvo una educación religiosa en el sentido estricto que confiere el judaísmo, pero creció en un ambiente en el que los rituales judíos se mantenían aunque fuera por pura tradición, lo que incluía el asistir a clases con un rabino para que le iniciara en el «Libro». Del poco calado que las creencias religiosas del judaísmo tuvieron en Von Neumann da fe el que no tuviera el más mínimo reparo en hacerse católico cuando las circunstancias lo requirieron, para poder formalizar su primer matrimonio. Von Neumann manifestó siempre un agnosticismo sin fisuras, a excepción de un breve lapso de

tiempo, justo antes de su muerte, en el que reclamó la presencia de un sacerdote católico.

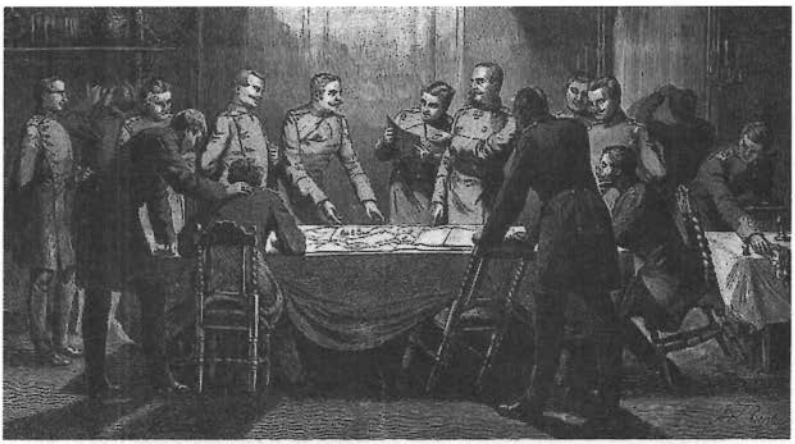
Hay dos cualidades que es muy frecuente encontrar entre las biografías de los grandes genios de las matemáticas. Una es la facilidad para los idiomas, y la otra, la memoria fotográfica. Es posible que ambas guarden una estrecha relación. János no fue una excepción. Era capaz de memorizar una página del listín de teléfonos con tan solo leerla un par o tres de veces. Cuando la familia se reunía con amigos, le pedían que hiciera alguna demostración, y entonces comprobaban que János podía recitar los nombres, apellidos, direcciones y números de teléfono siguiendo el orden de las columnas, o en orden inverso, o bien respondiendo preguntas de forma aleatoria. En una ocasión, su padre com-

KRIEGSSPIEL, JUEGOS DE GUERRA

Cuando era el pequeño János, Von Neumann jugaba con sus hermanos, especialmente con Mihály, a juegos de guerra, pero no lo hacía como la mayoría de los niños —él no solía hacer nada como la mayoría de la gente—, montando paradas militares o batallas en las que soldados de plomo caían abatidos por el impacto de pequeños objetos contundentes. Jugaban a una variante de un antiguo juego de guerra llamado «Kriegsspiel», que en alemán quiere decir literalmente «juego de guerra». En 1824, George von Reisswitz, teniente de artillería del ejército prusiano, ideó un juego de mesa que representaba un campo de batalla en el que podían recrearse diferentes estrategias de guerra. Muy pronto los altos mandos del ejército se dieron cuenta de que aquello iba mucho más allá de ser un mero juego y que podía ser utilizado para adiestrar a sus oficiales en las artes de la guerra. El éxito de esta iniciativa quedó probado en 1866 en la campaña contra Austria y, años más tarde, en las victorias obtenidas contra los ejércitos de Napoléon III. Con el tiempo, se difundieron diferentes versiones del Kriegsspiel en inglés, alemán y francés que fueron adaptadas por la mayoría de los ejércitos para la instrucción de los oficiales en las técnicas de estrategia militar. El Kriegsspiel al que János jugaba con sus hermanos era una versión recreada por ellos mismos a base de dibujar en un papel los campos de batalla con sus fortalezas, montañas, ríos y demás elementos necesarios para desarrollar las batallas. Durante la Primera Guerra Mundial, János siguió con detalle todos los informes sobre los avances y retiradas de tropas de los ejércitos para reflejarlos de la manera más fidedigna

pró una voluminosa enciclopedia; era tan grande que se vio obligado a destinar una de las habitaciones de la casa para poderla albergar. El pequeño János pasaba en aquella estancia varias horas cada día. Entre otras cosas, leyó de cabo a rabo una historia mundial. Empezó por el primer volumen y, sin saltarse una página, fue recorriendo cronológicamente la historia hasta que terminó en la última página del último tomo. En total, la enciclopedia histórica constaba de veinte gruesos volúmenes. Pero su mente no se dedicaba solamente a archivar datos, cosa a la que ayudaba su portentosa memoria fotográfica, sino que también se dedicó a gestionar la información. Ya de pequeño mostró un interés especial por las relaciones entre los diferentes países y especialmente por los conflictos bélicos y las distintas estrategias que se plantea-

posible en su Kriegsspiel particular. Años más tarde, durante su estancia en Estados Unidos, seguiría practicando este juego en sus frecuentes visitas a la corporación RAND (Research ANd Development), un laboratorio de ideas que forma a las fuerzas armadas norteamericanas.



Un grupo de oficiales prusianos discutiendo estrategias militares frente a un tablero de Kriegsspiel. Grabado de Adalbert von Roessler, hacia 1884.

ban. János intentaba establecer relaciones que no aparecían explícitas en los textos. Su interés por las estrategias militares se manifestó a edades muy tempranas. Había aprendido a jugar al ajedrez de la mano de su padre, que casi siempre le ganaba, lo que le permitió comprobar que su hijo era un mal perdedor. Sin embargo, si buscamos al niño que juega con soldados de plomo, volveremos a encontrar al estratega. Su hermano Mihály decía que sus juegos no consistían en organizar desfiles o derribar soldados, sino que sus formaciones militares obedecían a tácticas previamente establecidas, en las que mostraba mucho más interés en el desarrollo de la batalla y en los movimientos de tropas, que en los enfrentamientos bélicos en sí.

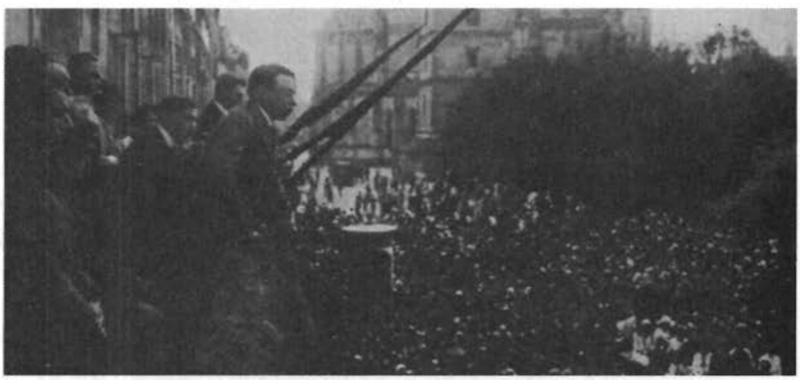
EL MILAGRO HÚNGARO

A mediados del siglo XIX tuvo lugar en Europa una profunda reforma de los sistemas educativos. La revolución industrial trajo consigo numerosas innovaciones tecnológicas que requerían procesos de fabricación en los que eran necesarios dispositivos y mecanismos que hasta entonces nunca se habían utilizado. Las nacientes ingenierías técnicas se veían obligadas a incorporar en sus programas de enseñanza nuevas asignaturas, la mayoría de las cuales requerían conocimientos matemáticos más avanzados que los que proporcionaban los acostumbrados programas de enseñanza.

El aprendizaje de las matemáticas es largo y se establece paso a paso. Es un edificio de varias plantas cuya construcción requiere de unos cimientos sólidos, que son los que se crean a lo largo de la enseñanza secundaria. Hungría inició una reforma a mediados del siglo XIX que ya se había consolidado a principios del XX, que tuvo como resultado lo que se conoce como el «milagro húngaro», un fenómeno que ha sido objeto de estudio por parte de muchos historiadores de la ciencia, y que dio nombres como el de los físicos Dennis Gabor (1900-1979), Leó Szilárd (1898-1964), Edward Teller (1908-2003) o el físico y matemático Eugene Paul Wigner (1902-1995), varios de ellos compañeros de Von Neumann en

EL ROJO Y EL BLANCO

Después de la Primera Guerra Mundial, Hungría vivió un breve pero sangriento período político bajo el régimen de Béla Kun, militar que en la Gran Guerra formaba parte del ejército austrohúngaro y que fue apresado por los rusos. En aquella época, se hablaba de los famosos lavados de cerebro de los soviéticos a sus prisioneros. Cierto o no, el caso es que Kun volvió a su país como comunista convencido. En marzo de 1919 tomó el poder y llevó a la práctica las teorías de Marx y Lenin al pie de la letra. Esto significó el traspaso de poder a la clase proletaria, gran parte de la cual pertenecía todavía al campesinado, la repartición de los bienes y una forma de terror político sistematizada y practicada por comisarios políticos designados directamente por el propio Kun. El vandalismo y las tropelías llevadas a cabo por las hordas de su partido convirtieron a Budapest en una ciudad peligrosa. La familia Neumann se exilió a Austria. János tenía entonces quince años. El partido de Kun duró apenas cinco meses y en agosto de 1919 fue derrocado por el almirante Miklós Horthy, que instauró un régimen de extrema derecha más violento que el anterior, pasando sin transición del terror rojo al terror blanco, durante el cual fueron asesinadas más de cinco mil personas y cerca de cien mil se vieron obligadas a abandonar Hungría. Los judíos habían formado parte activa del anterior régimen —ocho de los once comisarios políticos de Kun habían sido judíos—, y Miksa Neumann se salvó de la quema, ya que había mantenido una clara oposición al régimen de Kun. Además, seguía formando parte de la clase aristocrática y de los banqueros del régimen anterior. La seguridad de su familia estaba de momento garantizada, pero los judíos eran mal vistos en la mayoría de círculos sociales. Fue entonces cuando un gran número de intelectuales judíos decidieron emigrar a Alemania.



Discurso de Béla Kun en Kassa (actual Košice, en Eslovaquia).

su época de estudiante. El lema por el que se rigió la nueva reforma era «innovar o morir», una máxima que se siguió al pie de la letra. Fue la época en la que la matemática discreta se abría paso a través de la herencia continuista que todavía se arrastraba desde la época de Isaac Newton (1643-1727), en la que se habían constituido los fundamentos del análisis matemático. Un movimiento aperturista que tendría uno de sus máximos exponentes en David Hilbert (1862-1943), el gran matemático alemán que años más tarde sería uno de los mentores que tuvo mayor influencia sobre Von Neumann. László Rátz (1863-1930), matemático húngaro dedicado a la enseñanza secundaria, fue uno de los máximos responsables en la reforma de la enseñanza de las matemáticas en la educación media, iniciada en 1909. Una de las iniciativas que mejor impulsaron esta reforma fue la creación en 1894 de la *Középiskolai Matematikai Lapok* —revista matemática para la escuela secundaria—, cuya dirección recayó en Rátz. Se trataba de una publicación en la que participaban tanto profesores como alumnos y en la que básicamente se proponían problemas de matemáticas elementales. Esta revista, así como la instauración de concursos matemáticos, como el Eötvös, tuvieron una influencia decisiva en la aparición de nuevos matemáticos en Hungría.

EL INSTITUTO LUTERANO

Como era costumbre entre las familias acomodadas de la época, János fue educado en su hogar por tutores hasta la edad de diez años. Sus estudios de secundaria los cursó en el Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium, un colegio muy elitista que a pesar de pertenecer a la iglesia luterana —todos los colegios privados estaban sufragados por algunas iglesias, ya fuera cristiana, copta o luterana—, era una institución muy abierta en cuanto a las creencias religiosas, de manera que, además de las asignaturas lectivas correspondientes, János también recibió las enseñanzas de un rabino con el que se inició en la lengua hebrea y en la cultura judía contenida en la Torá.





FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Margaret Kan, esposa de Miksa Neumann y madre de Von Neumann.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Miksa Neumann junto a su hijo, el pequeño Margitta Neumann János.

FOTO INFERIOR:
Fachada del Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium, donde a partir de 1911 Von Neumann cursó sus estudios de escuela secundaria.



LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS



El físico y político húngaro Loránd Eötvös, a quien se debe el nombre de las primeras competiciones matemáticas, nacidas en Hungría en 1894.

Las Olimpiadas Matemáticas son, según reza su reglamento, «concursos entre jóvenes estudiantes, cuyo objetivo primordial es estimular el estudio de las matemáticas y el desarrollo de jóvenes talentos en esta ciencia». Sus orígenes se remontan a las competiciones matemáticas nacionales Eötvös de Hungría. En 1894, se le pidió servir al barón Loránd Eötvös (1848-1919) como ministro de Educación en el Gobierno húngaro, para ayudar a la aceptación de los derechos civiles y la libertad religiosa en el Parlamento. Para conmemorar ese acontecimiento, a partir de ese año la Sociedad Húngara de Matemáticas y Física decidió organizar concursos anuales para graduados de la escuela secundaria. El actual nombre de Olimpiadas data de 1958, año de celebración de las primeras Olimpiadas Internacionales de Matemáticas por iniciativa de Rumanía. En la primera edición participaron siete países, y en la actualidad, la participación se ha extendido a ochenta países de los cinco continentes. A Von Neumann, que obtuvo el premio nacional Eötvös, se le puede considerar un ganador preolímpico.

János pasó ocho años en este colegio. A pesar de ser un niño prodigio, nunca adelantó un curso, algo que podía haberle aislado de los demás y que de hecho iba en contra de los criterios pedagógicos del mismo László Rátz, al que tuvo como profesor de Matemáticas. En el instituto se fomentaba el trabajo en grupo y los compañeros de János se debatían entre la envidia y el respeto que despertaban sus extraordinarias capacidades intelectuales. Fue en este colegio donde hizo amistad con Eugene Wigner, premio Nobel de Física en 1963, que iba un curso por delante. Wigner cuenta que a János le gustaba mucho hablar, aunque fuera solo de

matemáticas, y que daban largos paseos durante los cuales János procuraba llevar siempre la conversación a la teoría de conjuntos, por la que ya entonces parecía estar especialmente fascinado.

Rátz se dio cuenta muy pronto de que estaba ante un genio y fue a hablar con el padre de János para recomendarle una educación personalizada que le ayudara a ampliar sus conocimientos de matemáticas, a lo que este accedió sin dudarlo un momento. Rátz habló con J. Kuerschak, un distinguido matemático de la Universidad de Budapest, que eligió como profesor particular a Michael Fekete (1886-1957), un joven matemático con el que János estuvo trabajando hasta que acabó los estudios de secundaria. En el último año de colegio, ambos hicieron un trabajo conjunto sobre un teorema de análisis que fue publicado en la revista *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung* («Informe anual de la Sociedad Matemática Alemana»).

János obtuvo el premio nacional Eötvös, un concurso a nivel nacional que se hacía entre todos los colegios de enseñanza secundaria y que exigía un nivel muy alto en la comprensión de conceptos matemáticos y en la resolución de problemas. Fue entonces cuando János pudo demostrar que era el mejor, algo de lo que, al parecer, tomó conciencia para el resto de su vida.

ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

A más de una persona le puede sorprender saber que uno de los más ilustres matemáticos del siglo XX fuera también licenciado en química. Esta no fue una carrera elegida por vocación, sino una solución de compromiso entre los intereses encontrados de padre e hijo. En Europa, una familia judía, fuera cual fuera la posición social o económica que ocupara, se veía obligada a vivir con las maletas preparadas para emprender en cualquier momento un viaje que podía ser solo de ida. Esto significaba la posibilidad de encontrarse de la noche a la mañana en un país extranjero con muy escasos recursos. En estas circunstancias, cualquier miembro de la comunidad judía era muy consciente de que el equipaje

más valioso no era el que llevaba en su maleta, sino el que transportaba en su cerebro, aquel que nadie le podía quitar mientras conservara la vida. Esto suponía que debía dominar uno o varios idiomas y tener los conocimientos necesarios para poder ejercer una profesión como medio de vida. Ambas cosas dependían en gran medida del entorno geográfico en el que se estuviera moviendo. En relación a los idiomas, Miksa Neumann ya se había ocupado de que sus hijos se desenvolvieran perfectamente en alemán y tuvieran conocimientos suficientes de inglés y de francés, con lo que ya tenían cubierto el acceso a los entornos culturales que en aquel entonces dominaban el escenario político mundial. En cuanto a conocimientos, el padre de János siempre vio con buenos ojos que su hijo tuviera una formación en matemáticas, ya que, dadas las cualidades innatas que había mostrado en ese terreno, sabía que acabaría destacando en el restringido círculo de los matemáticos profesionales. Pero eso era algo que podía quedar exclusivamente circunscrito al ámbito del prestigio intelectual, sin que necesariamente le proporcionara una holgada posición económica. Fue entonces cuando pidió ayuda a un ingeniero y físico amigo suyo, Theodore von Kármán (1881-1963), para que tratara de convencer a su hijo de elegir una carrera con un futuro más rentable. Entre los tres llegaron a un acuerdo: János estudiaría ingeniería química, pero sin abandonar las matemáticas, lo que le llevó durante los siguientes cinco años a una intensa actividad académica que solo alguien con sus extraordinarias dotes podía llevar a cabo.

El acceso a una universidad húngara estaba muy restringido y más todavía para los judíos, pero el currículum de János podía derribar con facilidad las puertas de cualquier universidad europea. En 1921, se matriculó para estudiar matemáticas en la Universidad de Budapest. En realidad, para obtener el título, ya que no asistió a ninguna clase y solo hizo acto de presencia para examinarse, eso sí, obteniendo siempre las máximas calificaciones. Simultáneamente, hizo dos cursos de ingeniería química en la Universidad de Berlín, de 1921 a 1923, y otros dos en el Instituto Federal de Tecnología de Zúrich, de 1923 a 1925, en el que obtuvo la licenciatura en química. Finalizó sus estudios académicos cuando

recibió el doctorado en matemáticas por la Universidad de Budapest en 1926, con una tesis sobre teoría de conjuntos. Cuando tenía veinte años, ya había publicado una definición de los números ordinales, que es la que todavía se utiliza en la actualidad.

A partir de ese momento, Von Neumann emprendió una carrera meteórica que le llevó a convertirse en uno de los matemáticos de mayor reconocimiento internacional. Fue conferenciante en Berlín de 1926 a 1929 y en Hamburgo de 1929 a 1930.

En 1927 recibió una beca Rockefeller para realizar estudios posdoctorales en la Universidad de Gotinga. Esta es una fecha remarcable en la biografía de Von Neumann, ya que aquella universidad era el centro neurálgico de las matemáticas del momento, y también porque allí conocería a David Hilbert, uno de los más insignes matemáticos del siglo XX y una de las personas que mayor influencia tendría en su carrera científica.

CAPÍTULO 2

Alemania: la matemática pura

Los trabajos más importantes que Von Neumann llevó a cabo en Gotinga bajo la dirección de Hilbert fueron básicamente sobre cuestiones de axiomatización. Para comprender el alcance de sus aportaciones, es interesante tener una visión clara del papel que los axiomas han desempeñado en las matemáticas a lo largo de toda su historia, pero sobre todo de las profundas crisis a las que dicha axiomática se vio sometida a principios del siglo XX y que pusieron en entredicho los fundamentos de las matemáticas.

En el último cuarto del siglo XIX, la matemática europea tenía como referencia a la Universidad de Berlín, caracterizada cada vez más por un pensamiento purista que se ponía de manifiesto en el tratamiento geométrico de los problemas en su vertiente sintética, oponiéndose a la utilización de elementos del análisis cartesiano y el álgebra, aduciendo que esta última era un enfoque que alejaba a las matemáticas de su faceta más intuitiva, que era la que proporcionaba la geometría clásica.

Para los puristas, un punto, una recta o un plano eran conceptos intuitivos que podían visualizarse y que permitían enunciar y demostrar teoremas por medio de las leyes de la lógica, basándose en el conjunto de axiomas que habían sido establecidos por el matemático y geómetra griego Euclides (ca. 325-ca. 265 a.C). En cambio, bajo el punto de vista analítico, una recta era un conjunto de puntos definidos en coordenadas cartesianas cuyas reglas del juego estaban dictadas por el álgebra abstracta. Ya por entonces, el análisis matemático se había desarrollado lo suficiente como para poder trabajar con rectas, planos y curvas con un elevado nivel de complejidad sin necesidad de «ver» nada de lo que se estaba haciendo.

La universidad de la ciudad alemana de Gotinga acabaría siendo el buque insignia de esta nueva forma de plantear las matemáticas.

GOTINGA

La Universidad de Gotinga fue fundada en 1734 por Jorge II, príncipe elector de Hanóver. En 1866, Prusia se anexionó dicho reino, lo que supuso un cambio importante, ya que el Gobierno prusiano consideraba que la universidad era una institución clave para el progreso de la nación. Este mismo año, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) fue nombrado rector de la universidad, institución a la que siempre permaneció fiel, rechazando todo tipo de ofertas, incluida la de una cátedra en Berlín, y en la que trabajó hasta su jubilación en 1930, aunque siguió impartiendo cursos hasta 1934. Klein tenía un proyecto, conocido como el Programa de Erlangen, que llevó a la práctica a lo largo de un período de diez años y con el que se proponía establecer nuevas relaciones

FELIX KLEIN

El matemático alemán Felix Klein nació el 25 de abril de 1849 en Dusseldorf, hijo de un alto funcionario del Estado prusiano. En los primeros años de su infancia fue educado por su madre. Tras estudiar durante dos años en una escuela elemental privada, en 1857 ingresó en el Instituto de Dusseldorf, en el que permaneció durante ocho años cursando el bachillerato. A los dieciséis años entró en la Universidad de Bonn. A pesar del interés que despertaban en él las matemáticas, se matriculó en muy pocas asignaturas de esta disciplina, dedicando la mayor parte de su actividad a la botánica. Al año siguiente de su acceso a la universidad, se encargó de las prácticas de física que se llevaban a cabo bajo la dirección de Julius Plücker, un físico matemático que estaba trabajando en su libro *Nueva geometría del espacio*. Klein profundizó en el tema hasta el punto de que a la muerte de Plücker, se encargó de la redacción de la segunda parte del libro.

Una formación a medida

Consciente de su falta de preparación en algunas áreas de las matemáticas, especialmente en el cálculo integral, en 1869 se trasladó a Gotinga, donde asistió durante un año a los cursos de Alfred Clebsch. Klein no siguió nunca un programa académico convencional, él mismo se marcó el camino a seguir según sus propios intereses. En su estancia en Berlín, en 1870, no asistió prácticamente a clases de matemáticas, pero sí mantuvo una intensa actividad de

entre las diferentes áreas que habían ido apareciendo en el mismo seno de las matemáticas, pero sobre todo hacerlas más cercanas a la física. En el desarrollo de este proyecto tuvo como firme aliado a David Hilbert, uno de los científicos más destacados del cambio de siglo, considerado como el matemático que más ha influido en la geometría después de Euclides.

El impulso que Hilbert dio a Gotinga a partir de 1895 provocaría un giro que acabaría convirtiendo al Instituto de Matemáticas de Gotinga en un referente mundial. Coincidió con Klein en abrir las puertas a la comunidad internacional y en abandonar las tendencias puristas y especializadas para conseguir una mayor unificación entre las diferentes áreas de las matemáticas, evitando siempre cualquier enfrentamiento abierto con la Universidad de Berlín. En este sentido, Gotinga destacó por ser una universidad



«café» con dos matemáticos importantes, el austriaco Otto Stolz (1842-1905) —que ya era catedrático, pero que había asistido a Berlín para ampliar estudios— y el noruego Sophus Lie (1842-1899), con quien llevó a cabo una actividad de trabajo extraordinariamente productiva, ya que fue quien le descubrió la importancia de una nueva teoría desarrollada por Évariste Galois (1811-1832), que tendría un papel trascendental en los futuros trabajos de Klein: la teoría de grupos. A instancias de Clebsch, Klein recibió el nombramiento de catedrático numerario de matemáticas de la Universidad de Erlangen, donde al explicar su programa docente, tuvo lugar por primera vez la lectura de su famoso Programa de Erlangen. A lo largo de su actividad docente, Klein enseñó matemáticas en Múnich (1875-1880), Leipzig (1880-1886) y Gotinga (1886-1913), ciudad esta última en la que fundó un instituto de matemáticas aplicadas. En 1882, Klein sufrió un derrumbe psíquico como consecuencia de una grave enfermedad nerviosa que terminó con su actividad como investigador. Murió en Gotinga el 22 de junio de 1925.

muy abierta que aceptaba científicos y pensadores innovadores con independencia de su origen, creencias o posición social.

Hilbert mantenía una postura muy clara en cuanto al papel que las matemáticas debían tener en relación a la física, incluso llegando a decir que la física era demasiado difícil para los físicos. Junto con el también matemático alemán Richard Courant (1888-1972), publicó un libro titulado *Los métodos de la física matemática* (1924), de inestimable ayuda para los físicos, que todavía se publica y que es conocido como el «Courant-Hilbert».

AXIOMÁTICA

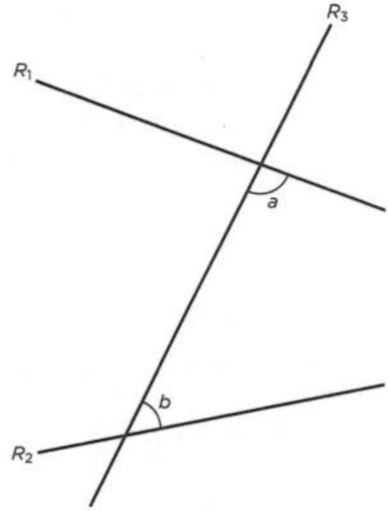
Los conceptos más elementales de punto, recta y plano, y las relaciones que se establecen entre ellos, desde las más sencillas hasta las más complejas, fueron sistematizados y ordenados, entre los años 330 y 275 a.C., en uno de los libros más difundidos de la historia de la humanidad: los *Elementos (Stoikheia)* de Euclides, en los que todo el saber geométrico de la época se condensó en trece libros. Euclides construyó la geometría utilizando tres herramientas conceptuales claves: los axiomas, los postulados y los teoremas. Los teoremas hacen referencia a proposiciones que no son evidentes y que se demuestran, mediante un proceso lógico de razonamiento, a partir de los axiomas y los postulados. Para ello, Euclides parte de veintitrés axiomas y cinco postulados, a partir de los cuales demuestra todos los teoremas. La diferencia que existe entre un axioma y un postulado es importante para comprender la naturaleza de la geometría que se describe en los *Elementos*. Un axioma no necesita demostración, ya que se trata de una proposición clara y evidente. Por ejemplo, el primer axioma de los *Elementos* dice: «un punto es lo que no tiene partes». En cambio, un postulado es una proposición que, no siendo tan evidente como un axioma, se admite como verdadera sin necesidad de demostrarla.

De esta forma, el edificio matemático se construye paso a paso sobre un sistema de axiomas y unas reglas de juego basadas en la lógica que permitan la creación de teoremas. Hasta la apari-

EL QUINTO POSTULADO

El quinto postulado de los *Elementos* de Euclides, que no tiene la nitidez de los otros cuatro, afirma:

> Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [ángulos] menores que dos rectos.



Supongamos una recta R_3 que corta a otras dos, R_1 y R_2 (véase la figura). Los ángulos internos, menores que dos rectos, a los que hace referencia el postulado, serían los señalados como *a* y *b*. El quinto postulado afirma que si prolongamos las rectas R_1 y R_2, estas se encontrarán en la parte derecha de la figura. Desde siempre llamó la atención de los geómetras que el quinto postulado no tuviera la simplicidad y, sobre todo, el carácter de evidencia de los cuatro anteriores. Hasta el mismo Euclides, consciente de ello, trató de evitarlo y, de hecho, no lo utilizó hasta la demostración de la proposición 29 del Libro I. Este intento de construir toda su geometría tratando de evitar el uso del quinto postulado ha conducido a que, en ocasiones, se afirmara que Euclides fue el primer geómetra no euclídeo. El caso es que, desde su mismo nacimiento, el quinto postulado de Euclides planteó algunos interrogantes. ¿Era cierto? Y en caso afirmativo, ¿era realmente un postulado independiente o se trataba de un teorema que podía ser demostrado a partir de los cuatro postulados anteriores?

ción de las geometrías no euclídeas el edificio parecía ser lo suficientemente sólido como para poder confiar en él. Pero los postulados sobre los que se basaba la geometría de Euclides habían tenido siempre un punto débil, el quinto postulado, que al final acabó creando una fisura en todo el sistema. Así, el quinto postulado de Euclides acabó convirtiéndose en una de las cuestiones

más controvertidas de la historia de las matemáticas, siendo objeto de polémicas investigaciones que duraron más de dos mil años.

GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

La geometría no euclídea aparece cuando se niega la validez del quinto postulado. Si tenemos en cuenta que durante dos mil años con la geometría euclídea se ha medido el mundo en el que vivi-

EL PROGRAMA DE ERLANGEN

En la geometría euclídea estamos habituados a manejar una serie de elementos, que son los objetos propios de esta geometría, como puntos, rectas, planos, ángulos, etc.; y una serie de transformaciones que actúan sobre dichos objetos. Podemos trasladarlos de un sitio a otro, hacerlos girar, alargarlos o encogerlos o aplicarles determinadas simetrías. Algunas de estas transformaciones pueden ser de «ida y vuelta», en el sentido de que si una transformación lleva un punto *A* hasta otro punto *B*, exista otra que lleve a *B* hasta *A*. También puede suceder que al aplicar dos transformaciones consecutivas, el resultado sea otra transformación. Cuando un conjunto de transformaciones cumple estas propiedades —además de algunos detalles adicionales que ahora no vienen al caso—, se dice que se tiene un «grupo de transformaciones». Algunas de las propiedades de los objetos con los que trabajamos en geometría pueden ser más o menos inmunes a dichas transformaciones.

Un ejemplo

Supongamos que a una circunferencia le aplicamos una traslación. El que el centro de la circunferencia esté en un determinado punto es una propiedad que cambia con la traslación. Si lo que hacemos es reducir el tamaño de la circunferencia, el radio variará. Sin embargo, frente a todas estas transformaciones hay una propiedad que permanece invariante, que es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Felix Klein observó que el estudio de estas propiedades invariantes era lo que en realidad definía un determinado tipo de geometría, ya que permitía comparar figuras con propiedades idénticas. Propuso entonces una definición de geometría —la más general y la más abstracta— consistente en una pareja $(X; G)$ formada por un conjunto X de objetos y un grupo G de transformaciones que pueden aplicarse a estos objetos. Todas las geometrías conocidas —euclídea, proyectiva,

mos, queda claro que se trata de un acto no exento de audacia intelectual. Ante esta perspectiva, podría parecer que la creación de geometrías no euclídeas no pudiera ir más allá de un puro juego matemático, de un superfluo diletantismo intelectual. De hecho, en un principio pareció que las cosas serían así, pero, con el tiempo, esas geometrías se revelaron como una herramienta poderosa, no solo en el ámbito matemático, en el que materias como los sistemas dinámicos, las funciones automorfas o la teoría de números se beneficiaron de ellas, sino que resultó ser una vara

hiperbólica, etc.— quedaban clasificadas por este sistema, además de abrir el camino a nuevas geometrías, ya que el conjunto de objetos geométricos *X* podía estar formado por cualquier tipo de objeto. Todas estas ideas fueron expuestas por Klein en 1872 en la cátedra de matemáticas de la ciudad de Erlangen bajo el título de «Panorama comparativo de las novísimas investigaciones geométricas». Con el tiempo, sería conocido en el ámbito matemático como el Programa de Erlangen de Felix Klein.



Postal de 1916 en la que se representa la calle de la Universidad de Erlangen.

de medir imprescindible en muchos campos de la física moderna. Para distancias relativamente pequeñas, la geometría euclídea y las no euclídeas son prácticamente equivalentes. Sin embargo, cuando se trata de distancias astronómicas o en ciertos ámbitos de la física moderna, como la relatividad o la teoría de propagación de ondas, las geometrías no euclídeas resultan ser una herramienta más precisa.

Ante este panorama, se llegó a la conclusión de que la geometría hiperbólica —un tipo de geometría no euclídea— era tan consistente como lo pudiera ser la geometría euclídea; es decir, si la geometría hiperbólica lleva a alguna contradicción, entonces, la geometría euclídea también. Los sucesivos avances en física teórica llegaron incluso a poner en evidencia que la geometría de Euclides no es necesariamente la más «realista».

La aparición de las geometrías no euclídeas había planteado una cuestión que iba mucho más allá de la misma geometría. Se trataba de abandonar el recinto sagrado de las verdades inmutables que nos mostraban los axiomas para focalizar el interés en la consistencia interna de dichos axiomas. Pero la geometría no había sido más que el detonador de una crisis mucho más profunda que acabaría por afectar a uno de los pilares básicos de toda la matemática, los conjuntos.

TEORÍA DE CONJUNTOS

En matemáticas, la teoría de conjuntos reviste una especial importancia porque es una teoría muy simple y sencilla, a partir de la cual se pueden definir los siguientes conceptos: par ordenado, relación, función, partición, orden, los números naturales, los enteros, los racionales, los reales, los complejos, la estructura de grupo, el anillo, el cuerpo, el espacio vectorial... La lista es muy, muy larga. Así pues, el concepto de conjunto es uno de los más fundamentales de las matemáticas. Es difícil encontrar alguna de sus ramas que no esté, implícita o explícitamente, basada en dicho concepto. Se podría afirmar que todo el edificio matemático

se sostiene sobre la piedra angular de la teoría de conjuntos, una teoría de la que solo se valen los matemáticos, los lógicos y, en menor medida, todos aquellos que se dedican a tareas de programación informática.

El primer escollo con el que se encuentra la teoría de conjuntos es la propia definición de conjunto; una vez salvado este trance, las cosas funcionan de maravilla. Es muy difícil definir lo que es un conjunto sin utilizar la misma palabra «conjunto» o alguno de sus sinónimos: agrupación, reunión, montón, etc. Una de las mejores definiciones, que no utiliza sinónimos —por lo menos de forma aparente— es la que dio el británico Bertrand Russell (1872-1970):

> Un conjunto es una consideración simultánea de entes.

Esta es una definición interesante, porque plantea el concepto como una actitud mental, lo que es síntoma de que se trata de un concepto muy primitivo. Podríamos, por ejemplo, estar en una reunión social en la que no conocemos a nadie y al borde del aburrimiento. Si, para pasar el rato, empezamos a fijarnos en los zapatos que llevan todos los asistentes a la reunión y hacemos luego una clasificación, aunque sea muy simple, como «me gustan o no me gustan», habremos empezado a establecer una relación en un conjunto muy bien definido: «el de todos los zapatos que hay en la reunión». El cambio en la actitud mental consiste precisamente en hacer de manera repentina esa consideración simultánea de objetos, «restringir nuestra atención a...», «fijarnos solo en...», que es la que ha definido al conjunto de zapatos.

Hay dos conjuntos especiales, y teóricamente imprescindibles: el conjunto vacío y el conjunto universal. El primero se simboliza con el signo $\emptyset$ y se define como el conjunto que carece de elementos. Es un conjunto que puede considerarse filosóficamente conflictivo y que, en su momento, tuvo sus detractores, ya que si carece de elementos, es que está formado por nada; la nada no existe y, por tanto, el conjunto vacío no puede tener una identidad real. El conjunto universal, en cambio, plantea el problema de que tiene demasiadas existencias o, si se quiere, de que

es demasiado grande. En la mayoría de textos se simboliza con la letra U. Su definición es algo más imprecisa que la del conjunto vacío, ya que lo que se pretende es que sea un conjunto que abarque a todos los conjuntos con los que estamos tratando. Ya que al vacío se le ha negado todo, sería tentador dárselo todo a U, pero esto sería tanto como afirmar que U es el conjunto de todos los conjuntos posibles, algo muy poco recomendable, no por una cuestión metafísica —que los matemáticos suelen obviar sin pestañear—, sino porque afecta a la lógica interna de la misma definición de conjunto. Por ello, al conjunto universal se le imponen unos ciertos límites convencionales. En el ejemplo que utilizamos al inicio, el del invitado aburrido que observaba los zapatos de los concurrentes a una fiesta, podríamos considerar como conjunto universal U el de «todos los zapatos que hay en la reunión». Pero se podría dar el caso de que nos conviniera ampliar el conjunto universal a los zapatos fabricados en el ámbito nacional si, por ejemplo, estamos haciendo referencia a determinadas marcas. Tampoco habría inconveniente en que tomáramos como conjunto universal al formado por «todos los zapatos del mundo». Lo importante es que sea lo suficientemente grande como para movernos en su interior a nuestras anchas. Es fácil que, siguiendo este tipo de procesos, nuestros conjuntos universales acaben teniendo infinitos elementos, por lo que no es de extrañar que la historia de la teoría de conjuntos esté íntimamente relacionada con la del infinito, y más en concreto, con el concepto de infinito actual y con la necesidad de crear objetos matemáticos con un número infinito de elementos con los que se pudiera operar.

A pesar de que las primeras nociones de conjunto fueron establecidas por Bernard Bolzano (1781-1848), la creación de dicha teoría se atribuye de forma indiscutible a Georg Cantor (1845-1918). Se podría decir que esta nació en 1874 en una memoria publicada en la prestigiosa revista *Journal* de Crelle con el título de *Über eine Eigenschaft des Ibegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* («Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos»).

El matemático y lógico alemán Gottlob Frege (1848-1925) fue el primero en establecer una serie de axiomas para dotar a

la teoría de conjuntos de una estructura lógica. Los axiomas no solo pretenden garantizar que las operaciones realizadas entre conjuntos son correctas, sino que de alguna forma muestran de forma implícita o explícita la misma definición de conjunto. Sin embargo, este sistema axiomático tuvo una vida corta debido a la aparición de una insidiosa paradoja.

LA PARADOJA DE RUSSELL

En 1903, Bertrand Russell demostró que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente, cuestionando la misma definición de conjunto, algo de lo que Cantor ya fue consciente al plantearse la imposibilidad de que existiera el conjunto de todos los conjuntos, ya que un conjunto no debería pertenecerse a sí mismo.

Supongamos que existen dos clases de conjuntos, los que pertenecen a sí mismos y los que no. Llamemos, por ejemplo, M al conjunto de todas las mesas que existen. Sea m una mesa cualquiera; entonces, m pertenece al conjunto M:

$$m \in M.$$

Está claro que el conjunto de todas las mesas no es una mesa, por lo que podemos afirmar que:

$$M \notin M.$$

Por tanto, este es un ejemplo de un conjunto que no se pertenece a sí mismo.

Consideremos ahora el conjunto T formado por todos aquellos conjuntos que tienen más de tres elementos. Si pensamos en el conjunto p, formado por una pareja de mellizos, tendremos que:

$$p \notin T.$$

Por otro lado, el conjunto T tiene seguro más de tres elementos —de hecho, tiene infinitos—, por lo que:

$$T \in T,$$

con lo que tenemos un ejemplo de conjunto que pertenece a sí mismo.

Russell plantea entonces el siguiente conjunto R:

«R está formado por conjuntos que tienen la propiedad de no ser elementos de sí mismos.»

Según los ejemplos anteriores, se tiene que:

$$M \in R \text{ y } T \notin R.$$

En estas condiciones, la pregunta que se plantea Russell es la siguiente:

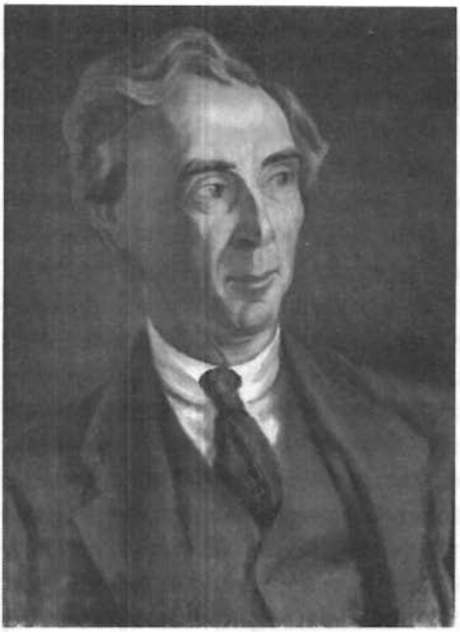
$$¿R \in R?$$

Si la respuesta es sí, entonces R no puede ser un elemento de R, ya que se contiene a sí mismo y, por lo tanto, no pertenece a R. Si la respuesta es no, entonces R es un conjunto que no pertenece a sí mismo, de manera que es un elemento de R. Así, sea cual sea la respuesta, nos encontramos con un elemento que pertenece y no pertenece a un conjunto, lo que constituye una paradoja o, en términos lógicos, una contradicción.

El problema que subyace bajo esta contradicción es que en el marco teórico de Cantor, nada impide que se puedan construir conjuntos como el de Russell, por lo que había que intentar definir una axiomática en la que este tipo de conjuntos no tuvieran cabida.

EL MODELO DE VON NEUMANN

El lógico y matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953) estableció un total de siete axiomas con los que no solo pretendía hacer consistente la teoría de conjuntos, sino también evitar





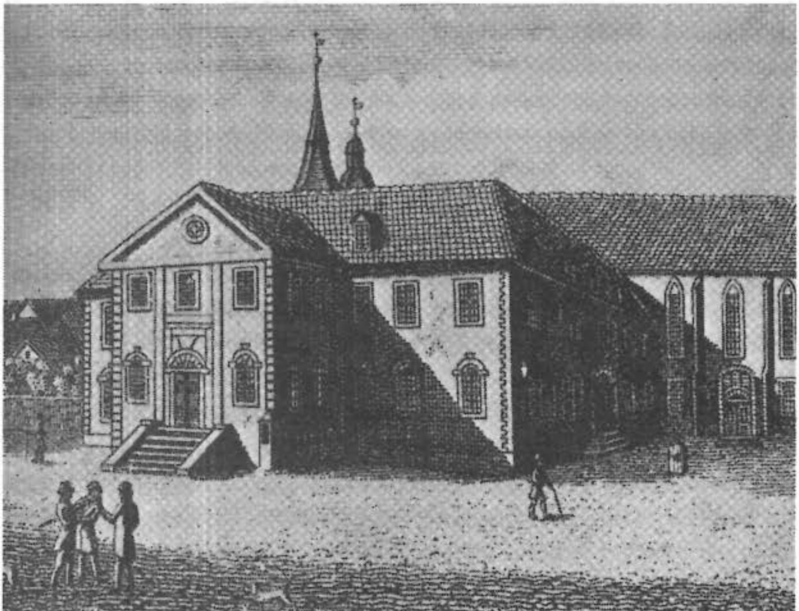


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Bertrand Russell, considerado uno de los fundadores de la filosofía analítica, en un óleo de Roger Fry, pintado en 1923.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Durante su estancia en la Universidad de Gotinga, Von Neumann (aquí en una fotografía de la década de 1940) conoció a David Hilbert, cuya obra ejerció sobre él una considerable influencia.

FOTO INFERIOR:
Grabado en cobre de hacia 1815 de la Universidad de Gotinga y el edificio de la biblioteca.

conjuntos conflictivos como el que Russell había creado para establecer su paradoja. Para ello, definió conceptos fundamentales y relaciones entre ellos. Estaban implícitas la definiciones de conjunto, la de conjunto vacío, la unión y la intersección, y también el conjunto de las partes. Con esto se garantizaba la existencia de conjuntos «seguros», aquellos en los que se podía confiar y que permitían demostrar teoremas que eran fundamentales para el análisis, a la vez que dejaba fuera de juego a los conjuntos poco fiables que pudieran dar lugar a paradojas. Más tarde, la teoría de conjuntos de Zermelo fue mejorada y ampliada por Abraham Adolf Fraenkel (1891-1965), dando lugar al conjunto de axiomas que se conoce como axiomática de Zermelo-Fraenkel. Siguiendo un símil empleado por Henri Poincaré (1854-1912), se habían encerrado a las ovejas en un corral para resguardarlas de los lobos que estaban fuera, pero todavía no había garantías de que al cerrar la cerca no hubiera quedado dentro algún lobo camuflado. Y es que la axiomática de Zermelo-Fraenkel permitía la creación de todos los conjuntos que son necesarios en la teoría matemática, pero no excluía la posibilidad de que existieran conjuntos que pertenecieran a sí mismos, como los lobos que habían quedado dentro.

«Existe un conjunto infinito A que no es demasiado grande.»

— **John von Neumann.**

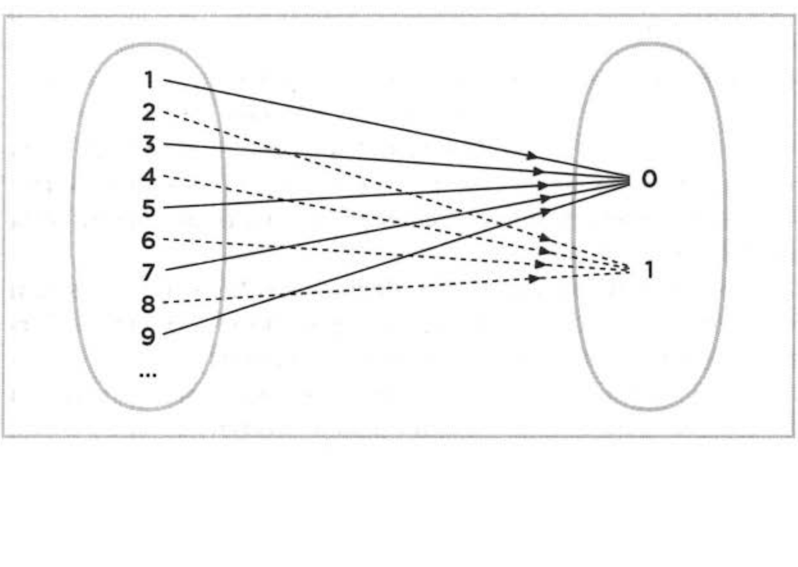
Von Neumann resolvió el problema de dos formas diferentes que se complementaban la una a la otra: el axioma de la fundación y el concepto de clase. Ambos modelos aparecieron en 1928 en su tesis doctoral por la Universidad de Budapest bajo el título de *Die Axiomatisierung der Mengenlehere* («La axiomatización de la teoría de conjuntos»).

Mediante el axioma de la fundación, Von Neumann construía los conjuntos de abajo hacia arriba, siguiendo los axiomas de Zermelo, de modo que si un conjunto pertenece a otro, forzosamente tiene que ser el primero en la sucesión. De esta manera, se evitaba la posibilidad de que un conjunto pudiera pertenecer a sí mismo.

Es importante destacar que el método que utilizó para demostrar este resultado, al que bautizó con el nombre de «método de los modelos internos», es una herramienta que se convirtió en fundamental en muchas demostraciones de la teoría de conjuntos y que se sigue utilizando actualmente. Por otro lado, el método del concepto de clase lo basó en la utilización de funciones para definir conjuntos.

LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Una función característica aplicada sobre un conjunto es aquella que solo toma dos valores 1 y 0, según un criterio definido previamente. Dicho criterio se establece de forma que todos los elementos que toman el valor 1 sean precisamente los que forman el conjunto que queremos definir. Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los números pares. Una manera de caracterizar a este conjunto mediante una función c sería la siguiente: $c(4)=1$; $c(7)=0$; $c(31)=0$; $c(220)=1$. Es decir, lo que hacemos es que la función c tome el valor 1 cuando es aplicada a un número par y el valor 0 cuando se aplica a un número impar (véase la figura). Según este criterio, el conjunto de todos los números pares estaría formado por todos aquellos números que toman valor 1 en



esta función característica. De esta manera, se observa que los conjuntos pueden ser definidos mediante funciones.

Una correspondencia definida entre dos conjuntos es una manera de definir una relación entre los elementos del primer conjunto y los del segundo. Por ejemplo, si el primer conjunto está formado por camisetas y el segundo por pantalones, podemos establecer una correspondencia entre ambos que diga: a cada camiseta del primer conjunto le corresponde un pantalón del segundo que tenga la misma talla. Diremos que el pantalón es la imagen de una determinada camiseta. Podría suceder que una camiseta tuviera una talla XXL y que entre los pantalones no hubiera ninguno de esa talla, por lo que diríamos que la camiseta en cuestión no tiene ninguna imagen. También podría suceder que hubiera una talla de camiseta a la que le correspondieran varios pantalones de la misma talla. En este caso, lo que diremos es que la camiseta tiene varias imágenes. Cuando se da la circunstancia de que en una correspondencia todos los elementos tienen una —y solo una— imagen, decimos que se trata de una aplicación o función definida entre ambos conjuntos. Un ejemplo de función es el siguiente: se define una aplicación del conjunto de los números enteros de manera que a cada número le corresponda dicho número multiplicado por dos. Si llamamos a esta función f se tiene, por ejemplo, que $f(2)=4$; $f(5)=10$; $f(14)=28$... Si en lugar de escribir la función como lo hemos hecho, indicando a dónde va a parar cada elemento mediante la letra efe y una igualdad, lo hubiéramos hecho mediante pares de elementos encerrados en un paréntesis:

$$(2, 4)\ (5, 10)\ (14, 28),$$

el resultado hubiera sido el mismo. La diferencia está en que ahora la función se define mediante un conjunto cuyos elementos están formados por pares. Así, resumiendo, una función puede venir representada como un conjunto de pares y un conjunto se puede expresar como una función característica.

La idea es que el conjunto, tal y como lo trata la axiomática de Zermelo-Fraenkel, se fundamenta en el concepto de pertenen-

cia. En cambio, la de Von Neumann —el matemático húngaro tenía veintidós años cuando estableció la axiomática de la teoría de conjuntos— está basada en el concepto de función. Esta diferencia formal tiene, entre otras, una consecuencia importante, y es que el número de axiomas que requiere la axiomática de Zermelo-Fraenkel no está determinado a priori —potencialmente, puede haber una infinidad de ellos—. En cambio, en la idea de Von Neumann bastan dieciocho axiomas; además, la primera puede estar incluida en la segunda como modelo.

La otra gran ventaja del modelo de Von Neumann es que el modelo de conjunto no está basado en el concepto de pertenencia, sino en el de clases de funciones, distinguiendo entre conjuntos y clases propias. Estas últimas son tan grandes que no cabe la posibilidad de que estén contenidas en ninguna otra. En cambio, los conjuntos, que obedecen a condiciones más restringidas, sí pueden ser elementos que pertenezcan a otras clases. De esta manera, en el recinto quedaban encerradas solamente las ovejas, dejando a los lobos fuera, ya que lo que conducía a contradicciones no era el considerar las clases propias, sino la posibilidad de que pertenecieran a otras clases. La axiomática de Zermelo-Fraenkel-Von Neumann se sigue utilizando en la actualidad.

MECÁNICA CUÁNTICA

Desde sus orígenes, la física ha sido una ciencia experimental. En numerosas ocasiones una teoría surge de un experimento y se consagra mediante otro experimento. En el interludio se construyen hipótesis de trabajo, se definen términos y, sobre todo, se establecen fórmulas, siendo el momento en el que la física y las matemáticas caminan de la mano. La formulación es importante porque, entre otras cosas, posee una capacidad predictiva y unas grandes dosis de generalización, consecuencia del carácter abstracto de las matemáticas. Si tenemos un depósito con un líquido cuyas características conocemos, y el recipiente tiene un orificio de salida, podemos hacer una medición que refleje el tiempo que

tarda el depósito en vaciarse. Si disponemos de una teoría adecuada sobre las leyes físicas que rigen el vaciado de depósitos —lo que invariablemente supone disponer de unas cuantas fórmulas matemáticas—, estaremos en condiciones de hacer predicciones del tiempo que tardan en vaciarse otros depósitos con formas diferentes y que contengan distintos líquidos y volúmenes.

En este sentido, que las matemáticas y la física vayan de la mano no presupone en absoluto que lo hayan hecho en su desarrollo histórico, ya que la mayoría de las veces han evolucionado recorriendo caminos separados, aunque al final acaben siempre encontrándose. Tarde o temprano, la física necesita de las matemáticas para consolidarse como ciencia exacta. La aparición de nuevas teorías como la relatividad y la naciente mecánica cuántica a principios del siglo XIX obligó a desarrollar unas matemáticas que se adaptaran a los nuevos paradigmas. Y es así como lo que se conoce por física teórica o física matemática adquirió un gran protagonismo, especialmente en entornos favorables, como sin duda lo era el que Hilbert había creado en la Universidad de Gotinga.

DOS TEORÍAS COMPLEMENTARIAS

Había datos experimentales que no podían ser explicados dentro del marco teórico de la física newtoniana. Especialmente dos fenómenos. El primero de ellos era la emisión de radiación por un cuerpo negro para el que no se había encontrado ninguna explicación satisfactoria. El segundo era que si un electrón giraba en una órbita alrededor de un núcleo debía ir perdiendo energía paulatinamente para finalmente acabar estrellándose contra el núcleo, cosa que no sucedía. Además, resultados experimentales también corroboraban que las partículas tenían una doble naturaleza, como onda y como corpúsculo, lo que se ponía de manifiesto en algunos experimentos realizados con fotones, en los que, como en el caso del efecto fotoeléctrico, se comportaban como si fueran partículas, y en otros manifestaban su naturaleza ondulatoria, como en el experimento de la doble rendija.

Aparecieron entonces dos teorías capaces de dar una explicación a estos fenómenos. La primera de ellas debida a Werner Heisemberg (1901-1976), y la segunda a Erwin Schrödinger (1887-1961). Así como la mecánica que planteó Heisemberg era una mecánica matricial, la de Schrödinger era una mecánica ondulatoria, y las herramientas matemáticas de las que se valía cada una de ellas eran lógicamente diferentes. En el esquema de Schrödinger, la ecuación de onda asociada a una partícula era una ecuación diferencial, cuya resolución para el electrón en el átomo de hidrógeno dio un resultado que coincidía con el obtenido experimentalmente, lo que sirvió para consolidar la teoría ondulatoria.

> «Es más fácil viajar en un avión, incluso pilotarlo, que entender por qué puede volar.»
>
> — John von Neumann.

Todo esto sucedía en Gotinga entre los años 1925 y 1926. Se hacía urgente la necesidad de encontrar una herramienta matemática que pudiera ser utilizada indistintamente por ambas teorías. En estas circunstancias volvió a darse la situación, tantas veces repetida a lo largo de la historia de la ciencia, de que una teoría matemática, completamente abstracta, en el sentido de que nada tenía que ver con alguna realidad física concreta, vino como anillo al dedo para unificar matemáticamente ambas teorías, y fue precisamente Hilbert el que la había creado con la teoría de los espacios funcionales. No obstante, la unificación, en un sentido más general, de ambas teorías, se conseguiría si se era capaz de establecer un sistema axiomático de naturaleza abstracta que fuera capaz de englobarlas.

LA AXIOMATIZACIÓN DE LA FÍSICA

¿Se puede axiomatizar la física? Esta fue la cuestión abierta que Hilbert planteó en Gotinga y que figura en sexto lugar en su fa-

mosa lista de los veintitrés problemas planteados en París en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas.

En el texto original, Hilbert pedía textualmente:

> [...] [investigar los fundamentos de] aquellas ciencias físicas en las que la matemática tiene un papel importante; en el primer nivel están la teoría de probabilidades y la mecánica.

En cuanto a las probabilidades, en 1933, el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov fue el primero en establecer una axiomática para las probabilidades. En relación a la física, diferentes científicos —entre ellos Von Neumann— hicieron avances muy importantes, pero hay objeciones a que pueda ser definitivamente resuelto debido a la enorme complejidad de los resultados experimentales que pueden hacer inestable el sistema

DAVID HILBERT

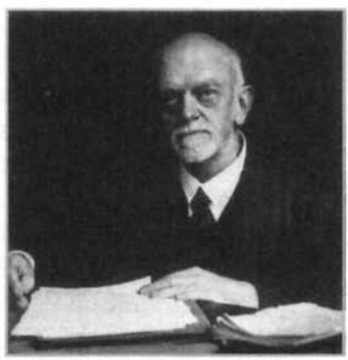
El matemático alemán David Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg —actual Kaliningrado, Rusia—, capital de la antigua Prusia Oriental. Su padre, funcionario del Estado, había sido destinado a esta ciudad para ejercer las funciones de juez. El ambiente familiar en el que creció Hilbert era propicio al desarrollo intelectual, en gran parte gracias a la influencia de su madre, una mujer extraordinariamente culta que cultivaba la filosofía, la astronomía y las matemáticas. A los dieciocho años, una vez terminado el bachillerato, Hilbert inició en la Universidad de Königsberg sus estudios de matemáticas. Tuvo maestros de privilegio, ya que entre ellos se encontraban personalidades como H. Weber o F. Lindemann. Este fue el período en el que Hilbert se inició en la teoría de invariantes y también cuando tuvo ocasión de conocer a Hermann Minkowski (1864-1909), matemático ruso con el que mantuvo una estrecha amistad durante toda su vida. En 1892, Hilbert obtuvo una plaza como catedrático extraordinario en la Universidad de Königsberg. Este cargo, además del prestigio académico, le permitía una estabilidad económica suficiente como para poder formar una familia, de manera que en 1892 se casó entonces con Käthe Jerosch. Uno de los momentos cruciales en la carrera profesional de Hilbert fue cuando, en 1895, Felix Klein, en contra de la opinión de la mayoría de académicos, le propuso para ocupar el puesto de profesor ordinario en la

axiomático; de hecho, este sigue siendo uno de los veintitrés problemas de la lista que todavía permanece abierto.

LA AXIOMÁTICA DE VON NEUMANN

Von Neumann axiomatizó la mecánica cuántica de manera que los parámetros que definían el estado de una partícula pudieran ser establecidos mediante los cinco axiomas que había determinado para el espacio de Hilbert. De esta manera, la formulación matemática era lo suficientemente abstracta como para permanecer separada por completo de la experimentación física. Estos resultados fueron publicados en diversos artículos que aparecieron en la revista *Mathematische Annalen* entre los años 1929 y 1930.

Universidad de Gotinga. A finales de la primavera de 1920, Hilbert cayó gravemente enfermo a causa de una anemia. En aquellos tiempos, se trataba de una larga enfermedad para la que no existían remedios eficaces. A pesar de la gran fatiga física y anímica en que se encontraba sumido, encontró fuerzas para dedicarse plenamente a investigar en los fundamentos de las matemáticas. Hilbert fue uno de los primeros pacientes en el mundo en probar un preparado hepático que desarrolló la medicina en 1927 y que afortunadamente le salvó la vida en aquella ocasión. Los diez últimos años de su existencia los pasó parcialmente aislado a causa de los acontecimientos políticos de la Alemania nazi. David Hilbert murió el 14 de febrero de 1943 en Gotinga, Alemania. A su entierro pudieron acudir muy pocas personas, entre ellas su esposa, que ya estaba medio ciega, y el físico Arnold Sommerfeld (1868-1951), que a duras penas pudo desplazarse desde Múnich para acudir al sepelio.



Retrato de David Hilbert en los últimos años de su vida.

Von Neumann se ocupó también de otro asunto que estaba incomodando sobremanera a los físicos y que iba a significar un avance importante en las teorías de la medida. En buena parte de los experimentos de física siempre se realiza algún tipo de medición, y las mediciones comportan errores. Por muy preciso que sea el instrumento utilizado, el error es inevitable, por lo que es importante conocer la magnitud del error o, por lo menos, tenerlo acotado entre ciertos márgenes. En física clásica, la teoría de la medición y de los errores se había desarrollado lo suficiente como para poder confiar de manera razonable en los resultados de los experimentos. Pero la física cuántica introdujo un nuevo concepto del error que dio al traste con las teorías anteriores. Debido a la propia naturaleza de la observación, no es posible obtener mediciones precisas, como mucho se puede aspirar a resultados de tipo estadístico. La explicación está en que lo que pretendemos medir tiene las dimensiones microscópicas de un átomo o de un electrón, y el aparato de medición interfiere inevitablemente con el objeto a medir. La situación es parecida a la que tendríamos si con una regla quisiéramos determinar la posición que tiene una caja de cerillas que está encima de una mesa con respecto a los bordes de la misma, y cada vez que acercamos la regla a la caja, movemos «sin querer» la posición de esta. Algo similar es lo que sucede en física cuántica.

El sistema axiomático establecido por Von Neumann era en sí mismo una teoría de la medida que permitía describir el proceso de observación y el objeto observado como elementos lógicos a tratar en el sistema de axiomas. Para ello, tuvo la brillante idea de considerar que la observación no transcurría a lo largo de un determinado período de tiempo, sino que tenía lugar en un instante, con lo que consiguió que tuviera un carácter atemporal. Todos estos resultados se encuentran contenidos en *Mathematische Grundlangen der Quantenmechanik (Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica)*, publicado en Berlín en 1932, uno de sus libros que mayor popularidad llegó a alcanzar. En 1936, este trabajo fue completado por Von Neumann en colaboración con el matemático estadounidense Garrett Birkhoff (1911-1996) con un estudio detallado de la lógica de la mecánica cuántica.

Von Neumann era consciente de que la lógica que describía los fenómenos cuánticos se apartaba sensiblemente de la lógica a la que estamos habituados en el marco clásico. En lógica de enunciados existe una conectiva que se representa con el signo $\wedge$, que es equivalente a la conjunción copulativa «y» en el lenguaje ordinario. Dos enunciados A y B unidos por esta conectiva se representan como $A \wedge B$. Por ejemplo, el enunciado A podría ser «Luis tiene treinta y cuatro años», y el B «Luis es moreno», de manera que $A \wedge B$ se leería «Luis tiene treinta y cuatro años y es moreno». La afirmación solo es verdad si ambos enunciados son verdaderos. Una de las propiedades de esta conectiva es su carácter conmutativo: $B \wedge A$; es decir, el que sea verdadero o falso no depende del orden en que consideremos los enunciados. Da lo mismo afirmar que «Luis tiene treinta y cuatro años y es moreno» que decir que «Luis es moreno y tiene treinta y cuatro años». Pero en física cuántica las cosas no funcionan de esta manera.

La luz es una onda electromagnética transversal que tiene dos planos de vibración perpendiculares. Cuando se coloca un filtro polarizado —es el material con el que se construyen los cristales para las gafas de sol polarizadas— en la trayectoria de un rayo luminoso, se impide el paso de uno de los dos planos de vibración, de manera que si se colocan dos filtros polarizados perpendiculares, la luz no puede pasar. Tomemos ahora un tercer filtro que esté polarizado en diagonal. Se comprueba experimentalmente que si este tercer filtro se coloca entre los dos anteriores, la luz sí puede pasar a través de los tres. Es obvio que, en cambio, si lo colocamos después del segundo, la luz no pasará porque los dos primeros no le dejan. Podemos llamar A al segundo filtro y B al tercero, y poner una pantalla detrás de los filtros. Podemos convenir en que «verdadero» es cuando la pantalla se ilumina y «falso» cuando queda a oscuras. Según esto, $A \wedge B$ daría como resultado «verdadero», ya que la pantalla con esta disposición de filtros se ilumina. En cambio, $B \wedge A$ sería «falso», dado que la luz no puede pasar; de manera que $A \wedge B \neq B \wedge A$.

Von Neumann compiló todos sus resultados sobre la lógica que debía regir los fenómenos cuánticos en una reedición de la *Mathematische Grundlangen der Quantenmechanik* publicada en 1936.

EL DERRUMBE DE LOS FUNDAMENTOS

Un sistema lógico como el que acabamos de describir sugiere una cierta «mecanicidad», en el sentido de que todas las operaciones que se llevan a cabo con los enunciados siguen unas reglas fijas. Dicho de una forma un tanto incorrecta, pero sencilla, es importante «tener cuidado» con lo que se hace, pero no es necesario «pensar» en lo que se hace. Entonces, parece que se podrían crear teoremas de geometría de una forma puramente lógica, sin necesidad de pensar en rectas o planos, ni imaginar cómo estos se cruzan o cortan en el espacio. Es más, podríamos pensar en la posibilidad de «darle vueltas a la manivela» y que se crearan de manera automática todos los teoremas geométricos posibles. Una posibilidad así haría que las matemáticas no solo fueran una ciencia exacta, sino también una ciencia perfecta, la ciencia de todas las ciencias.

Durante más de dos mil años, el método axiomático de la geometría había dado muy buenos resultados. Fundamentándose en unos pocos axiomas, se podían demostrar una infinidad de teoremas. Parecía razonable pensar que este mismo método pudiera aplicarse a otras ramas. A finales del siglo XIX, la aritmética ya había sido dotada de un sistema axiomático que parecía susceptible de entrar en el juego; una vez aceptados los axiomas, de ellos se podría derivar toda una serie de proposiciones que adquirirían el rango de teoremas. Ese era el objetivo que perseguía David Hilbert, pero el teorema de Gödel actuó en el proyecto como un torpedo en la línea de flotación.

Gödel se doctoró en 1930 con un trabajo dirigido por su director de tesis, el matemático austriaco Hans Hahn (1879-1934), titulado «La completitud de los axiomas del cálculo lógico de primer orden», un tema estrechamente relacionado con el programa formalista de Hilbert. A primeros de septiembre de ese mismo año asistió a un congreso sobre Epistemología de las Ciencias Exactas en Königsberg —actual Kaliningrado, en Rusia—, al que acudieron Rudolf Carnap, Arend Heyting, John von Neumann y Friedrich Waismann. En él manifestó de manera clara sus dudas sobre la posibilidad de llevar a cabo el programa formalista de Hilbert y anunció algunos de sus resultados sobre la incompletitud de la

KURT GÖDEL



Kurt Gödel durante su estancia en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (Nueva Jersey, Estados Unidos), en la década de 1940.

El matemático, lógico y filósofo austriaco-estadounidense Kurt Gödel (1906-1978) fue el menor de los dos hijos de Rudolf y Marianne Gödel, expatriados alemanes dedicados a la industria textil. Tras graduarse en el Realgymnasium de Brno, Kurt abandonó su país natal para matricularse en 1924 en la Universidad de Viena. Gödel había ingresado en dicha universidad con la clara intención de estudiar física, pero la influencia de dos de sus profesores, Philipp Furtwängler y Hans Hahn, le llevó a decantarse por las matemáticas. Por aquel entonces, ya había padecido unas fiebres reumáticas que le dejaron ciertas secuelas psicológicas que marcarían para siempre su carácter y que se traducían en una preocupación hipocondríaca por su salud y especialmente por todo lo que tuviera relación con la alimentación. En la década de 1920, a pesar de estar sumida en una fuerte depresión económica, la Universidad de Viena se había convertido en un centro cultural de referencia obligada. En 1926, Gödel fue invitado a un seminario de filosofía del círculo de Moritz Schlick, frecuentado por filósofos, físicos y matemáticos, como Rudolf Carnap (1891-1970), Hans Hahn (1879-1934), Moritz Schlick (1882-1936), Friedrich Waismann (1896-1959), Otto Neurath (1882-1945), y que acabaría por constituir el famoso Círculo de Viena. Carnap como filósofo y Karl Menger como matemático, fueron los que introdujeron a Gödel en la lógica matemática. En aquella época, el Círculo de Viena seguía muy de cerca los trabajos de Ludwig Wittgenstein (1889-1951) sobre el lenguaje del lenguaje —metalenguaje—, algo que Gödel ya se había propuesto aplicar a las matemáticas. A pesar de ello, Gödel no se adhirió a las corrientes de pensamiento del Círculo de Viena, en las que imperaba el positivismo lógico. Más bien mantuvo una postura contraria y marcada por un platonismo declarado. Gödel creía que las verdades existían con independencia de que se conocieran o no. En el terreno de las matemáticas, esto significaba que los teoremas no se creaban, sino que se descubrían. En más de una ocasión manifestó que los resultados a los que había llegado habían sido inspirados por esta metafísica platonista. Cuando en 1952 la Universidad de Harvard concedió a Gödel el título de Doctor Honorario en Ciencias, le distinguió como «el descubridor de la verdad matemática más significativa de este siglo».

aritmética. Poco tiempo después, en 1931, y con tan solo veinticinco años, publicó su famoso teorema de incompletitud, que iba a socavar los firmes cimientos en los que se apoyaban las matemáticas. A pesar de que el contenido del teorema versaba sobre temas muy especializados, obtuvo un eco internacional asombrosamente rápido y amplio, que en 1933 le permitió el cargo de docente ad honórem (*Privatdozent*, en alemán) en la Universidad de Viena.

LOS TEOREMAS DE GÖDEL

Una teoría es un cuerpo formado por un conjunto de axiomas y unas reglas de inferencia lógica que permiten establecer una serie de conclusiones o teoremas a partir de dichos axiomas. Una teoría es «contradictoria» cuando, dentro de su cuerpo teórico, se puede demostrar una afirmación y también su contraria. Cuando una teoría no es contradictoria, se dice que es «consistente». Por otro lado, dentro del marco teórico debe existir la posibilidad de demostrar cualquier afirmación que sea cierta. En este caso, se dice que el sistema es «completo».

El primer teorema establecido por Gödel afirma que en todo sistema axiomático capaz de albergar la aritmética de los números enteros, existen proposiciones que son ciertas, pero indemostrables dentro del mismo sistema; es decir, si la teoría aritmética es consistente, entonces es incompleta. Esto es tanto como afirmar que no puede existir un sistema de axiomas que comprenda a la aritmética de los números naturales que sea perfecto, ya que o bien es inconsistente o bien es incompleto.

Cuando Von Neumann acudió al célebre congreso de Königsberg, se interesó inmediatamente por los resultados que Gödel había expuesto. No es de extrañar este súbito interés si se tiene en cuenta que Von Neumann había establecido un sistema axiomático para la teoría de conjuntos que le llevaba a considerarlo como un tema prácticamente cerrado. Sin embargo, en ese momento Von Neumann debía aceptar que el sistema quedaba incompleto, no porque el sistema axiomático contuviera defectos, sino porque cualquier sistema de esa naturaleza era incompleto

por definición. Von Neumann no solo aceptó el resultado, sino que en el tiempo récord de un mes le presentó a Gödel una consecuencia de su teorema, que Gödel acabó demostrando como un segundo teorema.

El segundo teorema de Gödel afirmaba que si una teoría aritmética es consistente, no existe en su seno demostración alguna de que, efectivamente, lo es. Este segundo teorema es algo más intrincado y tiene como consecuencia que una teoría que comprenda en su seno a la aritmética de los números naturales no puede justificarse a sí misma, en el sentido de hacer una afirmación del tipo «la teoría T es consistente». Dicha teoría estará dotada de un cierto simbolismo formal, en el cual se pueda incluir la afirmación «la teoría T es consistente» mediante un símbolo que podría ser, por ejemplo, $C(T)$. El segundo teorema de Gödel afirma entonces que, si T es consistente, $C(T)$ no puede ser demostrado a partir de T.

Este segundo teorema, al que Gödel no pareció darle más importancia que la de ser una mera consecuencia del primero, resultó ser el que más repercusión acabó teniendo en la comunidad matemática, que lo ha conocido siempre como «segundo teorema de Gödel», sin que casi nunca se haga mención a la crucial intervención que Von Neumann tuvo en él.

Actualmente, las teorías de Gödel se han generalizado y aplicado a campos muy diversos. Uno de los terrenos en los que tiene una aplicación más directa es el de las ciencias computacionales, especialmente en la imposibilidad de resolver el «problema de la detención», que consiste en encontrar la manera de poder decidir si un ordenador cualquiera, con programas y datos de entrada arbitrarios, puede llegar a detenerse o a quedar atrapado en un bucle infinito. Otra de las consecuencias del teorema de Gödel en este terreno es la de los virus, ya que se demuestra que «ningún programa que no altere el sistema operativo de un ordenador será capaz de detectar todos los programas que sí lo hagan».

Hilbert valoró las consecuencias del teorema de Gödel con un cierto pesimismo, ya que había depositado grandes esperanzas en la posibilidad de que se pudieran establecer los fundamentos de las matemáticas de manera que dieran lugar a un proceso auto-

constructivo, del que podrían surgir resultados complejos a partir de suposiciones sencillas implantadas en un sistema lógico consistente. Gödel no compartía ese pesimismo, ya que no creía que su teorema de incompletitud implicara que el método axiomático no era el adecuado para el desarrollo teórico de las matemáticas, sino que simplemente afectaba al quehacer de las mismas, devolviendo a la intuición el papel protagonista que siempre había creído que debía tener. Este era un punto de vista totalmente acorde con sus concepciones filosóficas, más cercanas al platonismo que al positivismo lógico. En cierta forma, se podría afirmar que la acción demoledora de sus teoremas relegaba el aspecto mecánico y «exacto» de las matemáticas a un segundo término, priorizando el valor de la imaginación y de la intuición, devolviéndolas así al lugar que les correspondía como ciencias del espíritu, junto a la música y a la filosofía.

CONCLUSIONES

El programa de Hilbert había acabado en fracaso, pero Von Neumann tampoco compartía el pesimismo de Hilbert respecto al futuro de las matemáticas. A efectos prácticos, consideraba como un éxito la axiomatización de conjuntos que había liberado a esta de «objetos extraños» y también la posterior axiomatización que llevó a cabo en la mecánica cuántica. Von Neumann nunca renunció a establecer modelos lógicos y abstraer lo máximo posible determinados problemas, incluso en áreas muy apartadas de las matemáticas, como haría luego con la teoría de juegos. En su sentido más amplio, el plan podía haber fracasado, pero si bien la axiomatización no le ofrecía la posibilidad de eliminar desde sus orígenes las contradicciones y otros elementos extraños, sí le permitía poder tener un conocimiento y, hasta cierto punto, un control sobre ellos.

Las matemáticas se habían hecho siempre de la misma manera y los resultados habían sido satisfactorios. Von Neumann no veía motivos para que las cosas no pudieran seguir así. A pesar de

que era cierto que la validez interna del sistema lógico había quedado cuestionada, la historia de las matemáticas desde sus inicios proporcionaba garantías más que sobradas de su gran eficacia como herramienta, de la que se habían visto muy beneficiadas otras ciencias, especialmente la física. Von Neumann afirmaba que las matemáticas clásicas proporcionaban resultados que eran a la vez elegantes y útiles, y que se basaban en unos fundamentos tan sólidos como lo pudieran ser la existencia del electrón. Además, en su opinión, de la misma manera que alguien estaba dispuesto a aceptar la validez de una ciencia como la física, también podía aceptar la validez de las matemáticas clásicas.

CAPÍTULO 3

Teoría de juegos

Von Neumann dio paso a la creación de una nueva teoría matemática conocida hoy como «teoría de juegos». A partir de ese momento, los juegos pasaron a ser algo más que un mero pasatiempo para convertirse en el escenario en el que dos o varias personas podían desarrollar estrategias racionales para influir en el resultado final de la partida. Los escenarios podían ser muy diversos, e implicaban un tema tan fundamental y complejo como la toma de decisiones.

El juego es una actividad inherente no solo a la especie humana, sino también a la mayoría de las especies evolucionadas. Es un hecho comprobado que el juego, como tal, es imprescindible en la mayoría de procesos de aprendizaje y desarrollo de las facultades que consideramos superiores. Es a través del juego que muchos animales aprenden a coordinar movimientos para acechar, atacar, defenderse y es también por medio del juego que el hombre aprende un gran número de destrezas utilizando una serie de elementos con los cuales simular una situación real. En un juego hay tres conceptos claves: el escenario, el azar y la apuesta.

El escenario en el que se desarrolla el juego es el primer paso para reconocer su estructura, ya que permite crear modelos matemáticos en situaciones tan simples como una partida de dados, o tan complejas como pueden ser los posibles desenlaces de una batalla.

El azar interviene siempre en mayor o menor medida en cualquier tipo de juego y decide el grado de iniciativa de los jugadores a la hora de definir sus estrategias. En aquellos juegos en los que el azar es poco relevante, como el ajedrez, la iniciativa del jugador es decisiva. En cambio, en un juego de puro azar, como puede ser el lanzamiento de una moneda, la iniciativa de los jugadores se limita a la apuesta.

La apuesta es aquello que «se pone en juego». Puede ser algo inmaterial, como la habilidad del jugador o el honor, o puede ser algo que revista tintes tan dramáticos como jugarse la vida en

la ruleta rusa. En cualquier caso, todo juego lleva implícita una apuesta, incluso cuando nadie se juega nada, ya que un juego, como tal, no puede existir sin decidir si alguno de los jugadores ha ganado o ha perdido la partida. Lo importante de la apuesta es que se le puede asignar números. En el caso más simple, como es ganar o perder, sin más, los números podrían ser respectivamente 1 y 0; y cuando a algo se le pueden asignar números existe la posibilidad de darle un tratamiento matemático.

El cálculo de probabilidades y la estadística son teorías que surgieron a raíz del estudio sistemático de los juegos, pero más en el ánimo de la predicción que de la propia naturaleza del juego. Con los primeros trabajos de Von Neumann se adoptó una óptica distinta, muy lejos de los cálculos estadísticos, en los que el juego reveló una naturaleza diferente, no tanto como un suceso básicamente dependiente de las reglas del azar, sino más bien como un conflicto de intereses. En este sentido, hay que considerar las investigaciones de Von Neumann como un trabajo pionero en lo que acabaría siendo una nueva rama de las matemáticas: la teoría de juegos.

Es difícil llegar a saber con seguridad cuándo y dónde Von Neumann se interesó por el aspecto matemático de los juegos, ya que no hay constancia de ello ni en escritos ni en charlas informales. A finales de 1926, cuando todavía era becario en la Universidad de Gotinga, sorprendió con una conferencia sobre teoría de juegos en la sede de la Sociedad Matemática de dicha universidad. A raíz de esa conferencia, escribió un artículo que envió a la revista *Mathematische Annalen* y que fue publicado al año siguiente bajo el título «*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*» («Sobre la teoría de los juegos de sociedad»). Durante los años que siguieron a esta publicación no pareció interesarse por el tema, lo que no quiere decir que no lo hiciera, ya que dieciocho años más tarde publicó —junto con el economista Oskar Morgenstern— un libro sobre la teoría de juegos que figura entre las obras de mayor relevancia de Von Neumann.

En su trabajo inicial, Von Neumann formalizó matemáticamente los juegos competitivos en los que intervienen dos personas, mostrando un interés especial en las posibles estrategias que pueden desarrollar los jugadores en aquellos juegos que se caracterizan por lo que Von Neumann denominó «de suma cero».

OSKAR MORGENSTERN



El matemático y economista alemán Oskar Morgenstern nació el 24 de enero de 1902 en Görlitz, Alemania. Hasta cierto punto, se podría decir que era de cuna aristocrática, ya que su madre fue hija ilegítima del emperador Federico III. En 1925 se graduó en ciencias políticas y económicas en la Universidad de Viena. Gracias a una beca Rockefeller, pasó los siguientes cuatro años en Princeton para cursar estudios de posgrado. En 1929 volvió a Austria, donde entró a formar parte del Mathematische Kolloquium, un grupo de matemáticos liderado por Karl Menger (1902-1985), quien era especialmente crítico con el renombrado Círculo de Viena. En 1938, Morgenstern fue expulsado de su cátedra de Viena por las autoridades nazis y se vio obligado a emigrar a Estados Unidos, país en el que se nacionalizó. Ya en 1970, accedió a la cátedra de Economía en Princeton, cargo que ocupó hasta su muerte, el 26 de julio de 1977. Junto con Menger, Morgenstern defendió una clara postura a favor de la axiomatización de la teoría económica, rechazando las corrientes defendidas en parte por el Círculo de Viena, que optaban por el uso de herramientas matemáticas que habían sido utilizadas con éxito en la física, como el cálculo infinitesimal, para aplicarlas a la teoría del equilibrio económico. Por tanto, antes de que Von Neumann y Morgenstern se encontraran en Princeton ya había una concordancia casi absoluta de la forma en cómo había que abordar la economía si se pretendía que alcanzara el rango de ciencia.

JUGADORES

La teoría de juegos es de largo alcance porque sus posibles aplicaciones pueden ir más allá de lo que entendemos por «juego» y aplicarse a otros escenarios. De hecho, de lo que se trata es de definir estrategias y de formalizar la toma de decisiones. Existe un ejemplo que, por su extraordinaria simpleza, se utiliza con frecuencia para entender cuáles son los objetivos que persigue la teoría de juegos: el reparto de un pastel.

Supongamos que dos personas tienen que repartirse un pastel. Normalmente, en este ejemplo los protagonistas son dos niños. Se supone que facilita la comprensión el que se trate de jugadores a los que les gustan mucho los pasteles, y cuyo único objetivo es ganar y llevarse el pedazo más grande. En este sentido, la naturaleza egoísta de los niños define muy bien el perfil ideal del jugador. El reparto se plantea en los siguientes términos: el niño A cortará la tarta y el niño B será el primero en elegir su pedazo. Lo primero que hace el niño A es tener en cuenta al niño B y pensar que lo que este hará una vez la tarta esté cortada será coger el pedazo más grande. Este pensamiento es fundamental para decidirse por la mejor estrategia, que sin duda es cortar la tarta en dos pedazos iguales. Cualquier otra consideración es peligrosa. Si, por ejemplo, A piensa que, como B es un niño bueno y muy bien educado, cogerá siempre el trozo más pequeño, puede decidir un corte asimétrico que le favorezca. Esta es una opción mucho más arriesgada que la primera y se basa en todo caso en la intuición o en información privilegiada que poco o nada tiene que ver con el juego.

Esta exposición puede parecer excesivamente simple, pero contiene los elementos claves para determinar el escenario elegido por la teoría de juegos para que sus resultados sean válidos. Cualquier situación del tipo «solo juego para pasar el rato y no me importa perder y dejar ganar a mi contrincante», puede estar plenamente justificada en muchos escenarios, pero no en el de la teoría de juegos, en la que se considera que los jugadores son todos seres racionales y que actúan como tales, que su objetivo en el juego es ganar y que para ello adoptan una posición egoísta.

El requisito de que los jugadores deben ser perfectamente racionales va bastante más allá de que se comporten como tales. Supone una situación ideal, ya que nadie es capaz de tener en cuenta todas las jugadas posibles y tomar la decisión adecuada para ganar a toda costa. Juegos de estructura sencilla, como el nim o el tres en raya, permiten alcanzar ese nivel sin demasiado esfuerzo, ya que se trata de juegos en los que el árbol de decisiones tiene pocas ramas y que, si ambos jugadores son perfectamente racionales en el sentido antes indicado, terminan inexorablemente en tablas o bien la partida se decide en función de cuál es el jugador

que comienza. Otros juegos, como el go o el ajedrez, tienen estas mismas características, pero con un nivel de complejidad mucho más alto que hace casi imposible la infalibilidad de la jugada. En la actualidad, todavía no se sabe si en este tipo de juegos con jugadores idealmente racionales habría un ganador o necesariamente la partida finalizaría en tablas.

JUEGO BIPERSONAL DE SUMA CERO

En líneas muy generales, un juego es una dinámica en la que intervienen dos o más jugadores y que se desarrolla en un marco de reglas bien definidas. Los participantes pueden tomar decisiones que configuren un tipo particular de estrategia capaz de interferir en el desarrollo del juego. El objetivo del juego es obtener algún tipo de beneficio, por lo que el pago es uno de los conceptos fundamentales. El pago, una noción algo más general que la de la apuesta, es una forma de premio que puede ser externa al juego y a repartir entre los distintos jugadores, o bien tener forma de penalización. Este es el caso de una apuesta entre dos jugadores, en la que uno gana (pago positivo) y el otro pierde (pago negativo).

El concepto de pago permite establecer una primera clasificación de los juegos en dos grandes grupos: los juegos de suma cero y los de suma no-cero. Los primeros son aquellos en los que los jugadores compiten por un único premio o pago y se rigen por la sencilla fórmula de que el total de ganancias es igual al de pérdidas. En cambio, aquellos juegos en los que se puede optar simultáneamente por varios premios son juegos de suma no-cero.

El abanico de juegos de suma cero es muy amplio. Hay que tener en cuenta que juegos como las damas o el ajedrez entran en esta categoría, ya que basta con considerar que el vencedor obtiene un punto y el otro jugador lo pierde. También podemos decir que el primero tiene un punto positivo y el segundo un punto negativo. Este es el escenario que Von Neumann denominó «juego bipersonal de suma cero», que, como esquema, abarca una gran variedad de juegos competitivos.

Los juegos bipersonales de suma cero son a todo o nada, a muerte, de manera que el juego termina cuando uno de los jugadores gana y el otro pierde. Dicho de otra forma, no existe la posibilidad de que los jugadores colaboren entre sí.

MATRIZ DE PAGOS

Una disposición que resulta ser muy útil para analizar un juego es la llamada «matriz de pagos» (Pay-Off Matrix), que consiste en una tabla de doble entrada, en la cual las estrategias posibles del jugador A figuran en la izquierda y las del jugador B en la parte superior. Por estrategias se entienden las posibles opciones que plantea el juego. En cada una de las casillas de la tabla están representadas las ganancias o pérdidas que obtiene cada jugador según la estrategia elegida. Dos números, separados por una barra o una coma, representan las ganancias y las pérdidas para el primero y el segundo jugador, respectivamente. Por ejemplo:

		Jugador B	
		1	2
Jugador A	1	10/2	-3/5
	2	1/-6	4/8

Esta matriz de pagos nos dice que si el jugador A opta por la estrategia 2 y el jugador B por la 1, el resultado será que el primero ganará 1 y el segundo perderá 6. En cambio, si el jugador A opta por la 1 y el B por la 2, el primero perderá 3 y el segundo ganará 5. Otra manera más sencilla de representar la matriz de pagos, que tiene la misma lectura que la anterior, es la siguiente:

	B1	B2
A1	10,2	-3,5
A2	1,-6	4,8







FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
John von Neumann tomando té distendidamente con estudiantes graduados, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (IAS), en noviembre de 1947.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Busto dedicado a Von Neumann en Budapest.

FOTO INFERIOR:
En 1944, Oskar Morgenstern (en la imagen) y Von Neumann publicaron su obra *Theory of Games and Economic Behavior* («Teoría de juegos y conducta económica»).

En el caso de que se trate de un juego de suma cero, basta con poner un solo número en cada casilla, ya que lo que gana un jugador, lo pierde el otro. Por ejemplo:

	B1	B2
A1	9	-3
A2	-2	14

Esta matriz indica que si el jugador A opta por la primera estrategia y el B por la segunda, el primero pierde 3 y el segundo gana 3, y así con las demás casillas.

Esta forma de plantear un juego bipersonal de suma cero mediante una tabla de doble entrada es la que Von Neumann llamó reducción a la *forma normal del juego*.

Está claro que las tablas utilizadas en el ejemplo anterior se corresponderían con juegos muy sencillos, lo que no quiere decir que no puedan ser utilizadas para juegos tan complejos como el ajedrez, en el que la tabla de la matriz de pagos sería descomunalmente grande. Lo importante no es el tamaño de la tabla, sino el hecho de que el juego en cuestión pueda ser reducido a su forma normal.

Esta forma de modelizar un juego tiene un antecedente claro en el matemático francés Émile Borel (1871-1956), quien entre los años 1921 y 1927 publicó una serie de trabajos sobre teoría de juegos que tenían como objetivo fundamental el poder determinar estrategias ganadoras con independencia del factor suerte o de la condición psicológica de los jugadores a la hora de tomar decisiones. A pesar de las similitudes en los planteamientos, Von Neumann siempre reivindicó que sus investigaciones las había llevado a cabo con total independencia de los trabajos de Borel. Es cierto que los resultados matemáticos de Von Neumann tienen mayor generalidad e incluso responden a cuestiones claves que ni siquiera están planteadas en los escritos de Borel, pero aun así, hay autores que reivindican las aportaciones de Borel y que cuando se refieren a este esquema lo hacen como la teoría de Borel-Neumann.

PRIMER TEOREMA DEL MINIMAX

Para poder definir una estrategia ganadora como objetivo fundamental del juego, es necesario presuponer que los jugadores cumplen con los dos requisitos siguientes:

1. Ambos son racionales.
2. Ambos eligen sus estrategias solamente para promover su propio beneficio.

Supongamos ahora que dos jugadores A y B intervienen en un juego cuya matriz de pagos es la siguiente:

	B1	B2	B3
A1	-5	0	-2
A2	1	-3	-2
A3	3	8	-1

En esta matriz están reflejadas tres posibles opciones para cada uno de los jugadores; podemos pensar que los números representan ganancias o pérdidas en euros. Se trata pues de un juego bipersonal de suma cero planteado en su forma normal. Analicemos las posibles estrategias de cada uno de los jugadores. Supongamos que B elige la primera estrategia. Está claro que la mejor opción para A es la tercera estrategia, ya que gana tres euros, mientras que con la primera pierde cinco y con la segunda solo gana uno. En el caso de que B elija la segunda, A debería seguir manteniendo la tercera estrategia, ya que le proporciona la mayor ganancia. Y en la última opción, en la que B opta por la tercera estrategia, A pierde en las tres opciones, pero es en la tercera en la que pierde menos, solo un euro. De manera que la mejor estrategia a seguir por A es, sin duda, la tercera, independientemente de lo que decida hacer B.

Para el jugador B, el planteamiento es algo diferente. En el caso en que el jugador A opte por la primera, B1 es su mejor opción. En el caso A2, obviamente la opción es B2, y en caso A3,

B debe elegir la tercera, ya que representa la menor de las tres pérdidas. El caso es que B no tiene ni idea de qué es lo que va a hacer A y debe tomar una decisión; es entonces cuando se hace la siguiente conjetura: «A es un jugador racional y su mejor opción es A3, en cuyo caso B3 representa para mí la mejor opción, luego esta es la estrategia que voy a seguir». El jugador B sabe que, de otra manera, lo más probable es que pierda, y lo que hace es minimizar esa opción.

Siguiendo este esquema, Von Neumann hizo el siguiente planteamiento: en cada una de las filas aparece siempre un número que es el más pequeño de los tres, al que llama el *valor mínimo*. Por ejemplo, en la tabla anterior tenemos en la primera fila los números –5, 0, –2. El menor de los tres es, por tanto, –5. Siguiendo el mismo criterio, se tiene que para la segunda fila, el valor mínimo es –3, y para la tercera, –1. Ahora, lo que hizo Von Neumann fue tomar el número más grande de estos tres, que es –1 (que es en realidad, en las tres estrategias, el que representa la menor de las pérdidas). A este número lo llamó *mayor mínimo*.

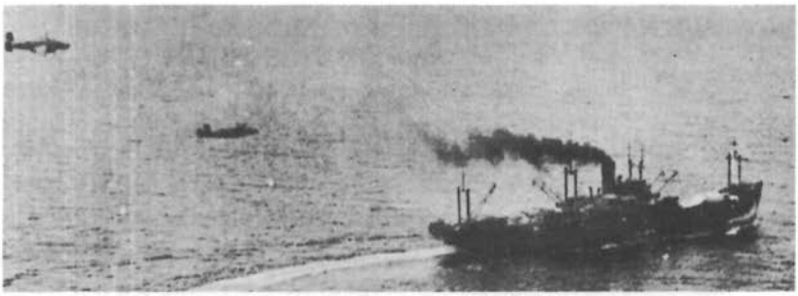
Con las columnas hizo lo mismo, pero al revés. Buscamos en cada columna cuál es el número más grande, es decir el *valor máximo*. Para la primera columna, tenemos que es el número 3, para la segunda el 8 y para la tercera el –1. Ahora buscamos entre estos tres números cuál es el más pequeño, al que Von Neumann llamó el *menor máximo*, que en este caso será –1.

En este juego, el mayor mínimo y el menor máximo coinciden en el valor –1. Y esto no es casual, pues es precisamente lo que afirma el teorema de Von Neumann: «en la mayoría de juegos bipersonales de suma cero el mayor mínimo de todas las filas coincide siempre con el menor máximo de las columnas», número que representa un valor de juego único de la mejor estrategia a seguir por ambos jugadores.

Este resultado, que se conoce como «primer teorema del minimax», se publicó en 1928 en el artículo «Sobre la teoría de los juegos de sociedad». En él, además de proporcionar una primera demostración del teorema del minimax, Von Neumann estableció las que serían las bases generales para la futura teoría de juegos.

LA BATALLA DEL MAR DE BISMARCK

La teoría de juegos ha tenido y sigue teniendo una estrecha relación con los llamados «juegos de guerra». Una de las primeras aplicaciones de esta teoría a la estrategia militar fue la que se llevó a cabo en la batalla del mar de Bismarck, el 23 de diciembre de 1942, que enfrentó las estrategias del general estadounidense George Kenney y del contraalmirante Masatomi Kimura. Al final de la batalla habían sido hundidos la totalidad de los buques de transporte y la mitad de la escolta japonesa. El criterio minimax proporcionó en esta batalla una estrategia ganadora a las fuerzas norteamericanas y asentó una nueva doctrina en lo referente a los vuelos de reconocimiento.



Los aviones de las tropas aliadas atacan a un buque japonés en la batalla del mar de Bismarck.

La flota japonesa debía salir del puerto de Rabaul, al noreste de la isla de Nueva Bretaña, con destino al puerto de Lae para servir como refuerzo. El contraalmirante Masatomi Kimura tenía dos opciones: elegir la ruta norte, que era la que pasaba por el mar de Bismarck, en la que solía haber condiciones meteorológicas adversas, o bien optar por la ruta sur, por el mar de Salomón, con condiciones climatológicas más favorables. El general Kenney debía concentrar todos los aviones de reconocimiento en una de las dos rutas, teniendo en cuenta el coste que suponía los días de que dispondría para el bombardeo una vez avistado el convoy. Al aplicar el criterio minimax a la matriz de pagos, se vio que la ruta norte tenía en ambos casos un coste estimado de dos días, por lo que se optó por esta estrategia:

		Kimura	
		Ruta norte	**Ruta sur**
Kenney	**Ruta norte**	2	2
	Ruta sur	1	3

Es importante insistir una vez más en que para que el teorema del minimax se cumpla, deben darse las condiciones de que ambos jugadores sean racionales, que velen únicamente por sus propios intereses y que analicen con todo rigor cada una de las posibles estrategias a seguir. No en todos los juegos se cumplen estos requisitos. Cuando, por ejemplo, uno de los oponentes es la naturaleza, intervienen factores que deben ser considerados como aleatorios y, en este sentido, se trata claramente de un oponente que no lleva a cabo ningún tipo de análisis.

«Cualquiera que considere métodos aritméticos para producir dígitos aleatorios está, por supuesto, en pecado mortal.»

— John von Neumann.

Sería de esperar que alguien que ha decidido estudiar los entresijos teóricos que se esconden detrás de los juegos eligiera como modelo juegos de la categoría de las damas o el ajedrez. Por supuesto, Von Neumann conocía bien estos juegos que practicaban con asiduidad sus padres y sus hermanos en el ámbito hogareño. Sin embargo, en el artículo de 1928 en el que demostraba el teorema del minimax, aparece un análisis exhaustivo sobre el juego del póquer. Se sabe que Von Neumann era muy aficionado a este juego, aunque parece ser que no se le daba demasiado bien. Lo que consideraba más interesante del póquer era la posible jugada de «farol», que a la hora de definir estrategias añadía al análisis una gran complejidad. El poder establecer matemáticamente en el póquer una estrategia adecuada es mucho más complicado que en el caso de los juegos bipersonales de suma cero. Aun así, Von Neumann inventó una variante simplificada del póquer que le permitió incluirlo en sus estudios.

PUNTOS DE SILLA

Supongamos que dos jugadores A y B se enfrentan a un juego con la siguiente matriz de pagos:

	B1	B2	B3
A1	-3	-1	4
A2	3	0	1
A3	3	-1	-4

Cuando el jugador A elige la estrategia 1, la máxima pérdida ocurre cuando el jugador B elige también la estrategia 1, y que para A supone una pérdida de –3, anotada en negrita en la siguiente tabla:

	B1	B2	B3	
A1	-3	-1	4	**-3**
A2	3	0	1	**0**
A3	3	-1	-4	**-4**
	3	**0**	**4**	

Siguiendo este sistema, se van anotando las máximas pérdidas en cada una de las estrategias. Vemos entonces que para el jugador A, el mínimo de todos estos valores es el cero, que corresponde a la estrategia 2. A este valor Von Neumann lo llamó el *valor del juego*. Cuando este valor es 0, como en este ejemplo, se dice que se trata de un juego justo. Para el jugador B, el mínimo valor también es en este caso 0, y se corresponde con la estrategia 2.

Observemos que las dos estrategias minimax coinciden en un punto de la tabla (A2-B2) que tiene la característica de ser el mínimo de la fila y máximo de la columna. A este punto se le llama ensilladura o *punto de silla*. Esto no tiene por qué suceder siempre, pero cuando sucede, condiciona la estrategia de ambos jugadores. En la tabla anterior es fácil comprobar que a ninguno de los dos jugadores le interesa cambiar la estrategia. Se trata de una situación de equilibrio, en la que el juego alcanza un resultado óptimo, ya que la estrategia minimax de un jugador coincide con la del otro. Cuando en un juego hay un punto de silla, se puede afirmar que este representa la estrategia estable. Es el fin del juego.

Visualizar un punto de silla es fácil si nos imaginamos una silla de montar con dos direcciones perpendiculares, una que podemos llamar A que es la que uniría los estribos y otra B la que va de la cabeza a la cola del caballo. El jinete se sienta precisamente en el punto de silla. El jugador que sigue la dirección A tiene que subir hasta alcanzar el «máximo» en el punto de silla. En cambio, el jugador B debe bajar hasta alcanzar su «mínimo» en dicho punto.

«Debemos predecir todos los procesos estables. Debemos controlar todos los procesos inestables.»

— JOHN VON NEUMANN.

Según esto, Von Neumann definió el punto de silla como un punto de una matriz que cumple que:

1. Es el mínimo de su fila.

2. Es el mayor de su columna.

Cuando en el desarrollo de una partida, el jugador A supone que B no va a cambiar de estrategia y, en consecuencia, opta por no cambiar la suya y, a su vez, el jugador B cree que A no cambiará y decide también no cambiar la suya, se dice que el juego ha alcanzado un «equilibrio de Nash» —por el matemático estadounidense John Forbes Nash (1928)—. En un juego dado, puede no existir ningún equilibrio de Nash o incluso existir uno o varios.

No todos los juegos bipersonales de suma cero tienen un punto de silla. Von Neumann puso un ejemplo muy sencillo para este caso, consistente en el lanzamiento simultáneo de dos monedas. Cada jugador apuesta un euro. El primer jugador lanza al aire simultáneamente ambas monedas. Si las dos coinciden en cara o cruz, se queda las monedas. En caso contrario, si en una sale cara y en la otra cruz, se las lleva el otro jugador. La matriz de pagos de este juego sería la siguiente:

JOHN FORBES NASH



Nacido el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia, Estados Unidos, John Forbes Nash destacó a muy temprana edad por su talento para las matemáticas y fue uno de los diez alumnos de su promoción que fueron premiados con una beca para estudiar en el Instituto de Tecnología de Carnegie, donde se inició en los estudios de ingeniería y de química, antes de decidirse por lo que habría de ser su verdadera vocación: las matemáticas. Su siguiente destino fue la prestigiosa Universidad de Princeton, donde se ganaría la admiración entre sus compañeros con un juego de mesa que años más tarde se comercializaría con el nombre de Hex. La afición de Nash por los juegos formaba parte de sus investigaciones matemáticas. En la década de 1950, la teoría de juegos se había convertido en uno de los campos más apasionantes de las matemáticas. Nash tuvo un papel crucial en el primer estudio experimental que se hizo del «dilema del prisionero» —véase el capítulo 5—, para luego centrarse en los juegos de suma cero o juegos no cooperativos, en los que los intereses de los jugadores son estrictamente opuestos. Una de sus aportaciones más importantes ha sido el concepto del llamado «equilibrio de Nash», pilar en el que se basaría una nueva teoría económica que en 1994 le valdría la concesión del premio Nobel de Economía. La noción de «equilibrio de Nash» corresponde a una situación en la que las dos partes rivales están de acuerdo con determinada situación del juego o negociación, cuya alteración ofrece desventajas a ambas partes. Es una fase del juego en la que ninguno de los jugadores, si considera que las acciones de su oponente están determinadas, deseará cambiar su propia opción.

	Cara	Cruz
Cara	1	–1
Cruz	–1	1

Es fácil comprobar que existe una diferencia de dos euros entre el mínimo valor máximo y el máximo valor mínimo. Este

tipo de situaciones llevó a Von Neumann a afinar todavía más su teoría de juegos al distinguir entre lo que se llamó *estrategias puras* y *estrategias mixtas*. Las primeras son aquellas en las que un jugador elige la misma estrategia en todas las partidas. Cuando ambos jugadores eligen ese mismo camino, todas las partidas son iguales. Por el contrario, las estrategias mixtas responden al hecho de que un jugador cambie su estrategia de una partida a otra siguiendo una secuencia aleatoria. Por ejemplo, puede decidir su estrategia en función del lanzamiento de una moneda o de unos dados. En el artículo publicado en 1928, John von Neumann demostró matemáticamente que en todo juego bipersonal de suma cero en el que sea posible jugar estrategias mixtas, además de las puras, las estrategias minimax de cada jugador coincidirían siempre en una solución estable, un punto de silla. La teoría general de juegos pivota sobre este resultado.

En conclusión, el teorema del minimax afirma que en todo juego finito de dos jugadores racionales, con suma cero y con estrategia pura o estrategia mixta, siempre existe una solución. Este teorema fue considerado por Von Neumann como la clave de bóveda sobre la que se sustentaba todo el edificio de la teoría de juegos.

INFORMACIÓN INCOMPLETA

El primer teorema del minimax que Von Neumann demostró en 1928 se puede aplicar a la mayoría de juegos bipersonales de suma cero, pero no a todos, ya que el planteamiento requiere que, en todo momento, cada uno de los jugadores conozca sin ambigüedades cuál es la situación que se ha alcanzado en el juego. A este tipo de juegos Von Neumann los clasificó como «juegos con información completa». En una partida de ajedrez, de damas o de tres en raya, cada uno de los jugadores puede comprobar cuál es la situación de las fichas después de la última jugada. Pero si, por ejemplo, uno de los jugadores ocultara una parte del tablero, esta condición ya no se daría y el teorema no podría aplicarse.

Von Neumann demostró un segundo teorema del minimax que podía aplicarse a juegos bipersonales de suma cero con «información incompleta». Según dicho teorema, no se puede conseguir una estrategia ganadora para una única partida, pero sí es posible establecer una media ganadora cuando se juegan varias partidas.

Un juego muy sencillo que sirve para ilustrar estas condiciones es el clásico «piedra, papel o tijera». La matriz de pagos de un juego en el que los contendientes se jugaran un euro en cada partida sería:

		B		
		Piedra	Papel	Tijera
A	Piedra	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tijera	-1	1	0

En el caso, por ejemplo, en que el jugador A saque papel y el jugador B piedra, el jugador A gana un euro, perdido por el jugador B. Los empates, en los que nadie gana ni pierde, tienen un cero en cada casilla.

Es fácil comprobar que en este ejemplo el primer teorema del mininax no se cumple, ya que el mayor mínimo de cualquier fila es –1, mientras que el menor máximo de cualquier columna es 1. Esto es debido a que la información del juego en incompleta. En una sola partida no existe un criterio para decidirse por alguna de las tres estrategias. Sin embargo, en el caso de jugar varias partidas puede que uno de los jugadores elija una cierta pauta. Según Von Neumann, la mejor será la que esté dictada por las leyes de azar, ya que al jugador contrario le impedirá identificar un patrón de juego. Además, si en este caso el jugador contrario adopta la misma estrategia, no tiene garantizada la victoria, pero al menos sí una probabilidad razonable de quedar empatados, lo que también es una manera de minimizar las pérdidas.

En estas condiciones, el segundo teorema del minimax afirma que el mayor mínimo del *resultado medio* para A coincide con el menor máximo del *resultado medio* de B. Este teorema es

de carácter más general que el primero, ya que puede aplicarse a juegos bipersonales de suma cero, ya sean con información completa o no.

TEORÍA DE JUEGOS Y TOPOLOGÍA

El enunciado del teorema del minimax es elemental y se puede entender empleando un lenguaje coloquial que no incluya tecnicismos, pero la demostración está muy lejos de ser sencilla. En un primer momento, Von Neumann intentó demostrar el teorema valiéndose únicamente de técnicas algebraicas, pero no consiguió llegar a un resultado satisfactorio, por lo que recurrió a la topología.

La topología es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras que permanecen invariantes frente a determinado tipo de transformaciones consistentes en dilatar, contraer o estirar, siempre que en dicha transformación no se hagan coincidir puntos diferentes ni se hagan aparecer otros nuevos. Se dice que dos figuras son topológicamente equivalentes cuando se pueden obtener la una de la otra mediante transformaciones de este tipo. La mejor manera de hacerse una idea de lo que son este tipo de transformaciones es imaginar que tienen lugar en una superficie elástica, en algún tipo de goma o plastilina que podamos deformar con cierta facilidad y sobre la que haya un dibujo, por ejemplo un cuadrado. Estirando convenientemente la superficie elástica, llegaremos a conseguir que el cuadrado se convierta en un círculo o en un hexágono o en un polígono cualquiera. Lo importante es que, durante la transformación, la superficie no se rompa y que no superpongamos unos puntos sobre otros. Este tipo de transformaciones que se pueden llevar a cabo sin cortar, agujerear o pegar, es decir, manipulando a base de modelar estirando, apretando o alisando, es lo que se denomina una *transformación continua*.

Un tipo particular de este tipo de transformaciones son aquellas que dejan un punto fijo. Concretamente, de los espacios que tienen esta propiedad para cualquier tipo de transformación

continua se dice que poseen la propiedad del punto fijo, y son importantes porque constituye un invariante topológico que permite la clasificación de diferentes tipos de superficie. Entre los varios teoremas que hay referentes a puntos fijos, cabe destacar uno que reviste especial importancia, el teorema del punto fijo de Brouwer, debido al matemático alemán L.E.J. Brouwer (1881-1966). El enunciado matemático es algo complicado, pero se puede comprender fácilmente de la siguiente manera. Imaginemos que tenemos una taza de café y que revolvemos el líquido suavemente con una cucharilla. El teorema afirma que, una vez que el café haya vuelto a su estado de reposo, hay un punto que se encontrará exactamente en la misma posición que estaba antes de revolverlo. De las muchas maneras que hay de revolver el café, una de ellas es un caso particular en el que el teorema es evidente, que es aquella en la que el movimiento de la cucharilla sigue un círculo alrededor del borde. En este movimiento circular, el punto que está en el centro de la taza permanece siempre inmóvil —es el ojo del huracán—, y ese es precisamente el punto fijo de Brouwer.

Von Neumann encontró una estrecha relación entre el teorema del minimax y la teoría de los puntos fijos. Esto no solo le ayudó a demostrar el teorema en cuestión, sino que años más tarde le permitió llevar a cabo una importante ampliación del teorema del punto fijo de Brouwer.

LA GUERRA DE LOS SEXOS

A pesar de su nombre, quizá poco afortunado, la guerra de los sexos es un ejemplo clásico en la teoría de juegos aplicada a situaciones de la vida cotidiana que nos permite entender conceptos básicos y sacar conclusiones de tipo social. El esquema original fue planteado por Robert Duncan Luce y Howard Raiffa en *Games and Decisions* («Juegos y decisiones»). El juego está formado por una pareja hombre-mujer que debe decidir cómo pasar la tarde del domingo. Las alternativas que se plantean son «ir

al fútbol» o «ir al cine». Las preferencias de él y de ella son un tópico y, por lo tanto, muy claras. Lo que ocurre es que a esta preferencia se añade otra, que priva sobre la anterior y que es la de ir juntos donde sea, antes que separarse, ya que es una de las pocas tardes de las que disponen para ello. Según esto, el orden de preferencias de él sería:

1. Los dos van juntos al fútbol.

2. Los dos van juntos al cine.

3. Él va al fútbol y ella al cine.

4. Él va al cine y ella al fútbol.

En función de estas preferencias, podemos establecer la siguiente matriz de pagos, de manera que 1 signifique el mejor pago y 4 el peor:

	Ella fútbol	Ella cine
Él fútbol	1,2	3,3
Él cine	4,4	2,1

La lectura de esta tabla de pagos es sencilla. Si los dos van al fútbol, él va donde quiere y está con ella (1 de preferencia); sin embargo, ella no va donde quiere, pero está con él, lo que ocupa el segundo lugar de sus preferencias. Si él va al fútbol y ella al cine, cada cual va donde quiere, pero están separados, lo que ocupa para cada uno de ellos el tercer lugar en su orden de preferencias (3,3).

Nos encontramos ante un juego sin repetición, es decir, que se juega una sola vez y no se pueden tomar decisiones en función de las que ya se han tomado en juegos anteriores. Además, se trata de un juego sin transferencia de utilidad, no cooperativo, ya que suponemos que no pueden establecerse acuerdos previos, como serían los del tipo que ella le propusiera a él: «si vienes conmigo al cine, te pago la entrada».

La estrategia minimax nos llevaría a la siguiente situación:

	Ella fútbol	Ella cine	
Él fútbol	1,2	3,3	3
Él cine	4,4	2,1	4
	4	3	

Las mayores pérdidas que sufre él son 3 y 4; por tanto, su minimax es 3. Las de ella son 4 y 3; su minimax también es 3. Esta situación ocurre cuando él va al fútbol y ella al cine, con un pago de 3,3, que no es ni mucho menos el mejor para cada uno de ellos. Nos encontramos ante una situación en la que la estrategia minimax no representa un punto de equilibrio de Nash, ya que uno de los jugadores podría cambiar la estrategia para obtener una mayor ganancia. Cuando él se dirige solo hacia el estadio, podría cambiar de opinión e ir al cine, con lo que obtendría una mayor ganancia —aun a riesgo de que ambos tomaran la misma decisión y se encontraran con la pérdida máxima—.

Haciendo un pequeño esfuerzo de imaginación, podríamos pensar en un mundo en el que a las mujeres les apasionara el fútbol y a los hombres el cine. El juego sería exactamente igual que el descrito con anterioridad. Esto quiere decir que se trata de un juego simétrico. Vamos a realizar ahora una pequeña modificación que lo convertirá en un juego asimétrico. Alteremos el orden de valores de él:

1. Los dos van juntos al fútbol.
2. Él va al fútbol y ella al cine.
3. Los dos van juntos al cine.
4. Él va al cine y ella al fútbol.

Es decir, él prefiere ir solo al fútbol que juntos al cine. Entonces, la matriz de pagos es la siguiente:

	Ella fútbol	Ella cine
Él fútbol	1,2	2,3
Él cine	4,4	3,1

Ante esta perspectiva, está claro que, independientemente de lo que elija ella, él siempre elegirá ir al fútbol, ya que sale ganando en cualquiera de las dos opciones que tome ella. Y para ella, dadas las circunstancias y sabiendo que él elegirá siempre ir al fútbol, la jugada más ventajosa es acompañarle al partido. Este sí es un punto de silla, un punto de equilibrio de Nash, una estrategia a la que siempre acudirán ambos jugadores. En este caso, se dice que existe una dominancia de opciones o que un jugador posee una estrategia dominante, que es preferida a cualquier otra estrategia a su disposición. Se pueden dar casos en los que cada uno de los dos jugadores tenga una estrategia dominante.

Lo paradójico de la situación anterior es que la posición egoísta y de dominación «voy a ir al fútbol contigo o sin ti» conduce, en este caso, a un resultado mejor que el del caso anterior.

TRANSFERENCIA DE UTILIDAD

En su artículo «Sobre la teoría de los juegos de sociedad», aparecido en 1928, Von Neumann se planteó una variante para los juegos de suma cero, considerando aquellos en los que intervenían más de dos jugadores, un escenario con una nueva variable: las posibles alianzas entre jugadores. En el caso, por ejemplo, de tres jugadores A, B y C se puede dar la circunstancia de que dos de ellos, A y B, se alíen para contar como un solo jugador mediante algún tipo de pacto, como podría ser el ir a medias en los beneficios. En los juegos que se han analizado hasta ahora, los contendientes no podían comunicarse entre sí para establecer acuerdos previos. En esos casos, se habla de *juegos sin transferencia de utilidad*, a diferencia de aquellos en que los jugadores pueden comunicarse entre sí y establecer determinados pactos antes de em-

pezar a jugar y que reciben el nombre de *juegos con transferencia de utilidad*, también conocidos como *juegos cooperativos*.

Por ejemplo, imaginemos un grupo de tres amigos A, B y C que deben repartirse entre ellos 100 euros. La decisión de cómo va a ser el reparto se hará por votación y mayoría simple. Las posibles coaliciones son AB, AC, BC y una cuarta ABC. Con estas premisas, las distintas formas de establecer los pagos son infinitas:

A = 33; B = 33; C = 34
A = 70; B = 30; C = 0
A = 25; B= 70; C = 5
etc.

Así, ninguna coalición es estable. El análisis en este tipo de juegos es muy diferente —y bastante más complicado— del que se lleva a cabo en los juegos no cooperativos. Aquí se trata de averiguar qué posibilidades hay de formar coaliciones estables en las que el reparto de ganancias se haga de tal manera que ninguno de los miembros cooperantes esté interesado en romper la coalición. En la vida práctica, este tipo de análisis lleva a la propuesta de un arbitraje que haga factible la coalición óptima. Una situación real que requiere este tipo de técnicas es, por ejemplo, la que se da en el Parlamento Europeo cuando hay que asignar un presupuesto a repartir entre todos los miembros de la Comunidad, teniendo en cuenta que cada país tiene asignado un número determinado de parlamentarios con derecho a voto.

Las posibles coaliciones entre jugadores introducen un factor de inestabilidad difícil de gestionar. En cualquier caso, la única forma de aplicar los resultados obtenidos para los juegos bipersonales de suma cero es considerar el conjunto formado por una alianza como la identidad unitaria de un nuevo jugador. Si en un escenario en el que hay, por ejemplo, cuatro jugadores A, B, C y D, se forma una alianza entre A, B y C, y a este terceto de jugadores se le considera como un jugador enfrentado a D; entonces se puede aplicar el esquema de juego bipersonal de suma cero.

El teorema del minimax, y en general los resultados de la teoría de juegos, tienen sus limitaciones. Obviamente, no son un

método infalible para ganar en cualquier juego que se nos presente, incluso aunque se trate de dos jugadores racionales. Lo que la teoría propone es la mejor forma de tomar decisiones, es decir, cuál es la mejor manera de jugar. Es posible que un jugador racional enfrentado a otro que no lo sea, pueda desarrollar técnicas de juego ganadoras que poco o nada tengan que ver con la teoría de juegos. Lo realmente importante de la cuestión es el hecho de haber podido desarrollar una teoría matemática capaz de modelizar un escenario, de abstraer una situación para someterla a las leyes de la lógica matemática y obtener unos resultados. Bajo este punto de vista, la teoría de juegos guarda muchas similitudes con la axiomatización de la teoría de conjuntos o la de la mecánica cuántica. Este es el verdadero centro de interés de Von Neumann y el motivo por el que su obra se dispersa en áreas científicas tan heterogéneas, llegando incluso a dar un formato científico a disciplinas que carecían de él, como es el caso de la teoría económica.

TEORÍA ECONÓMICA

El primer estadio de una ciencia es desarrollar técnicas de observación que le permitan llevar a cabo una precisa descripción del objeto estudiado. El siguiente paso es establecer leyes, casi siempre empíricas, que sean un fiel reflejo del comportamiento de dicho objeto. A partir de este punto, la teoría debe ser capaz de predecir el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. La descripción científica de un sistema planetario tan complejo como el nuestro perdería gran parte de su valor si no fuera capaz de determinar, por ejemplo, la fecha, la hora exacta y la localización geográfica en que tendrá lugar un eclipse de Sol. Sin embargo, para que dicha predicción no sea un arte adivinatoria, sino una ciencia exacta, es necesario que el cuerpo teórico que la sustenta esté «matematizado», que es casi tanto como decir que sus leyes respondan sin ambigüedades a un conjunto de ecuaciones. En este sentido, cuando se afirma que la física

dejó el ámbito de la filosofía natural para convertirse en ciencia, se está afirmando implícitamente que las recién nacidas técnicas del cálculo infinitesimal habían convertido en fórmulas las leyes de la mecánica establecidas por Newton. Galileo realizó una descripción detallada de la caída libre de cuerpos, pero habría que esperar hasta la aparición del cálculo infinitesimal que matematizó las leyes de la mecánica para conocer con un alto grado de precisión cuánto tarda la piedra en llegar al suelo y con qué velocidad lo hace.

CIENCIA Y ECONOMÍA

A principios del siglo XX, algunas ciencias naturales, como la química o la biología ya habían introducido en su teoría técnicas matemáticas de cálculo. Pero en las llamadas ciencias sociales, este proceso resultaba ser —y todavía lo es— mucho más difícil, ya que interviene siempre lo que llamamos el factor humano y todo lo que conlleva de impredecibilidad. Aun así, entre las ciencias sociales, la economía era la que en principio tenía más puntos para convertirse en ciencia, ya que en última instancia trataba con números, pero ese era a su vez uno de los motivos por el que mucha gente no veía con buenos ojos el que algo tan sensible como el comportamiento humano se tratara fríamente con la ciencia de los números.

En el terreno de la predicción, uno de los aspectos en los que la teoría económica se ha mostrado siempre más interesada, es donde a su vez se muestra más débil. En este sentido, siempre ha guardado grandes semejanzas con otra disciplina, también de gran complejidad, como es la meteorología, con la diferencia de que, a hechos pasados, la segunda tiene herramientas de análisis muy superiores a los de la primera. Es posible que la meteorología no sea capaz de predecir un determinado fenómeno atmosférico, pero sí puede, una vez acontecido, explicar con detalle las causas que lo han producido, cosa que la teoría económica no puede hacer la mayoría de las veces frente a muchas crisis que se producen de forma inesperada. Parece lógico que las cosas sean de

CARL MENGER Y LA COMPUTACIÓN DE LA MORAL



El economista austriaco Carl Menger fue el padre de Karl Menger, matemático que alcanzó un gran renombre internacional.

El factor humano siempre ha tenido un peso importante a la hora de establecer una teoría económica, pero no solo por lo que tiene de impredecible, sino también porque obliga a la intervención de factores de índole estrictamente moral. En este sentido, es interesante recalcar la influencia que tuvieron en Morgenstern, y consecuentemente en Von Neumann, las tesis sostenidas por Carl Menger (1840-1921), conocido por su obra *Principios de economía política*. Menger, influenciado filosóficamente por la obra de Wittgenstein, se planteaba el código moral como un conjunto de reglas de juego que rigen, ordenan y estructuran las relaciones humanas en el conjunto de individuos que conforman una determinada sociedad, de manera que deben considerarse tantas «morales» como diferentes grupos sociales entren en consideración. Para analizar estos diferentes códigos morales, Menger proponía la utilización de la lógica y la combinatoria, descartando así la utilización tan en boga del análisis infinitesimal, que tan pobres resultados había dado en su aplicación a la teoría económica. Precisamente en esta concepción era donde Morgenstern veía grandes posibilidades de mejorar el tratamiento de la teoría económica, expectativa que se vio en parte cumplida con la adopción de la teoría de juegos y muy especialmente con el teorema del minimax aplicado al análisis de los equilibrios del mercado.

esta forma si tenemos en cuenta que la meteorología está mucho más cerca de las ciencias físicas que la economía y que, por tanto, es mucho más susceptible de ser matematizada. No en vano, Von Neumann dijo en una ocasión que la economía llevaba un retraso de un millón de millas respecto al estado de una ciencia avanzada como la física.

EL PLANTEAMIENTO DE VON NEUMANN

A pesar de que no había publicado ningún trabajo sobre teoría económica antes de 1937, el interés de Von Neumann por los temas de economía se despertó ya en las conversaciones que su padre, banquero, traía con frecuencia a colación en las reuniones familiares. Desde un buen principio, su idea era abandonar las herramientas propias del cálculo infinitesimal, a pesar de los buenos resultados que se habían obtenido en su aplicación a la mecánica newtoniana. Von Neumann creía incluso que eran técnicas sobrevaloradas a las que poco partido iba a poder sacar la teoría económica.

Su planteamiento estaba más en el área de lo que hoy llamamos «matemática discreta». Siguiendo técnicas muy parecidas a las que empleó en la teoría de juegos y aprovechando la generalización que él mismo había llevado a cabo del teorema del punto fijo de Brouwer, Von Neumann publicó en 1937 un trabajo titulado «Sobre un sistema de ecuaciones económicas y una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer», en el que demostró la existencia de un parámetro matemático que representara el equilibrio de precios. Quizá lo más relevante de este trabajo fue que la teoría se basaba en un sistema de axiomas que había creado con independencia de su justificación económica. En este sentido, su metodología guardaba muchas similitudes con la manera en como había tratado la axiomatización de la teoría de conjuntos o la de la mecánica cuántica. Se trataba siempre de partir de cero y de definir con precisión los elementos que iban a entrar en juego.

La teoría de juegos había sido desarrollada en un ámbito puramente matemático, pero Von Neumann quería darle una dimensión más allá de esas fronteras y eligió la economía como nuevo destino. Antes de Von Neumann, la economía se valía de analogías con la mecánica clásica, utilizando, como ya se ha comentado, herramientas propias del análisis matemático como el cálculo de variaciones. El cambio fue utilizar la teoría de juegos y herramientas como la combinatoria y la convexidad. También habría que añadir que los trabajos de Von Neumann significaron el

inicio de lo que hoy se conoce como «matemática aplicada». Para este proyecto, el gran matemático húngaro tuvo un compañero de viaje. Esta vez no se trataba de un matemático o un físico, si no de un economista un tanto especial.

LA TEORÍA DE JUEGOS Y LA ECONOMÍA

En 1934, Von Neumann conoció en Princeton a Oskar Morgenstern (1902-1977), un economista alemán que había alcanzado una gran reputación en el Círculo de Viena. Morgenstern, que tenía una clara tendencia a rodearse más de matemáticos que de economistas, se interesó de inmediato en el nuevo enfoque que Von Neumann proponía. Ambos coincidían en sus críticas a la manera en como hasta entonces se había enfocado la teoría económica y se pusieron a trabajar juntos para preparar un texto que tenía como finalidad servir de prólogo a un conjunto de conferencias sobre teoría económica que Von Neumann iba a impartir en Princeton. Sin embargo, Morgenstern primero iba a tener que ponerse al día para alcanzar el nivel matemático que requerían las circunstancias. Von Neumann le recomendó una serie de lecturas que le habrían de facilitar el trabajo. En este punto, hay que reconocer el mérito y el talento de Morgenstern, ya que alcanzar el nivel requerido para trabajar codo a codo con Von Neumann no debía ser una tarea nada fácil.

Lo que empezó siendo un texto introductorio para un ciclo de conferencias acabó convirtiéndose en uno de los libros de teoría económica más importantes que se habían escrito hasta la fecha y que sirvió de base no solo para el desarrollo posterior de la teoría económica, sino también para la recién nacida teoría de juegos. El libro que Von Neumann escribió conjuntamente con Morgenstern apareció en 1944 bajo el título *Theory of Games and Economic Behavior* («Teoría de juegos y conducta económica»), y está considerada como una de las obras más importantes de Von Neumann y en la que la teoría de juegos aparece completamente desarrollada, hasta el punto de que se la considera como punto de partida de una nueva rama de las matemáticas.

En esta obra, Von Neumann y Morgenstern demostraron que un juego cualquiera con n jugadores y suma no nula se puede reducir a un juego con $n+1$ jugadores y suma nula. El hecho de que en la teoría de juegos se estudien básicamente los juegos de dos jugadores con suma nula se debe a que estos son más sencillos de analizar y en cierto sentido generalizan el caso de $n+1$ jugadores con suma nula. Es obvio que la complejidad aumenta exponencialmente con el número de jugadores. Para resolver esta complejidad, Von Neumann y Morgenstern trabajaron con matrices n-dimensionales y funciones de n variables.

«La característica vital más importante de las matemáticas es, en mi opinión, su particular relación con las ciencias naturales, o más generalmente, con cualquier ciencia que interpreta la experiencia a un nivel más que el meramente descriptivo.»

— John von Neumann.

Las aplicaciones de la teoría de juegos al comportamiento de los agentes económicos surgieron de forma natural al considerar a estos como sujetos de un juego competitivo en el que el objetivo era conseguir un beneficio minimizando los riesgos. Se trataba, por tanto, de juegos competitivos en los que cabían posibles alianzas entre los participantes.

Puede parecer paradigmático, pero es frecuente que muchos de los libros que mayor influencia han tenido en la evolución de una determinada disciplina sean comparativamente los menos leídos. Tiene su lógica si pensamos que su lectura —que en general requiere de conocimientos previos muy avanzados— está reservada a un estrecho círculo de especialistas. Pero, por otro lado, estos mismos especialistas suelen gozar de un reconocido prestigio que acaba popularizando la obra más allá de entornos puramente profesionales, hasta el punto en que los medios de comunicación se interesen por el tema y lo pongan de moda. Algo así sucedió con *The Theory of Games and Economic Behavior*, un libro plagado de fórmulas y de lectura difícil, claramente encaminado a especialistas, al que *The New York Times* le dedicó un

GÖDEL Y LA CONSTITUCIÓN

Una noche, Oskar Morgenstern recibió una llamada telefónica de Kurt Gödel en la que le comunicaba, con cierta excitación, que había descubierto inconsistencias en la Constitución de Estados Unidos. El caso es que, al día siguiente, Gödel debía presentarse ante el juez Philip Forman para formalizar, en lo que había de ser un puro trámite, su nacionalización como ciudadano norteamericano. Estaba claro que Gödel se había leído a fondo la Constitución y que no estaba dispuesto a dejar pasar ni una. Entonces, Morgenstern decidió llamar a Einstein —que ya por aquel entonces gozaba de una extraordinaria popularidad— para que le acompañara en la visita al juez. De forma que al día siguiente se presentaron los tres en el juzgado. Como era de esperar, Gödel inició una disertación sobre un fallo en la redacción del artículo quinto de la Constitución que hacía peligrar la consistencia de todo el sistema. Por suerte, Morgenstern y Einstein pudieron convencer al juez de las buenas intenciones de Gödel y este pudo jurar la Constitución sin mayores problemas. Sin duda, tuvo suerte de ir muy bien acompañado y de encontrarse con un juez inteligente.



Einstein disfrutaba de la compañía de Gödel y solían dar juntos largos paseos por el campus de Princeton.

largo artículo en el que ponía de manifiesto la revolución que el nuevo enfoque significaba. Al poco tiempo, todos los especialistas —y, como sucede con frecuencia en estos casos, muchos que no lo eran— coincidieron en que la aparición de este libro supuso un antes y un después en la historia de la teoría económica. A pesar de ello, apenas llegaron a venderse cuatro mil ejemplares en cinco años. Muchas de las suscripciones no fueron de matemáticos ni de economistas, sino de jugadores profesionales que debieron quedar muy frustrados al abrir el libro y encontrarse con 165 páginas repletas de fórmulas matemáticas.

Von Neumann y Morgenstern comparaban el nivel científico de la teoría económica con el que tenía la física antes de las teorías de Newton o de Keppler. Consideraban que los enfoques intuicionistas, exentos de una teoría sólida en la que apoyarse y en la que los autores basaban sus explicaciones en una terminología vaga que carecía de definiciones precisas, apenas tenían validez. No obstante, también eran conscientes, y así lo manifestaban, de que el desarrollo futuro de la economía exigiría la creación de unas nuevas matemáticas que todavía estaban por inventar.

CAPÍTULO 4

Estados Unidos: la matemática aplicada

Hasta 1940, el trabajo de investigación de Von Neumann se había centrado en las ciencias puras. A partir de entonces, la mayor parte de sus trabajos fueron encaminados a las matemáticas aplicadas y, debido a los violentos acontecimientos de esas fechas, muchos de ellos aplicados al escenario bélico, y otros, como la nueva arquitectura de ordenadores, fueron herramientas fundamentales para construir el nuevo tejido social de la posguerra.

A finales del siglo XIX, el nivel de las matemáticas que se enseñaban en Estados Unidos era muy bajo comparado con el europeo. La materia impartida en los primeros cursos universitarios era el equivalente en Alemania a las materias de enseñanza secundaria, algo que afectaba no solo a los propios cursos de matemáticas, sino también a la mayoría de carreras técnicas que tenían que utilizarlas como herramienta básica. Además, en la mayoría de las universidades norteamericanas, al profesorado se le pagaba para enseñar, no para investigar, de manera que a dicho estamento se le hacía necesario recurrir a otras fuentes de financiación si quería dedicarse a tareas de investigación.

Así las cosas, se imponía una reforma global que, entre otras cosas, considerara la creación de revistas especializadas y asociaciones matemáticas que sirvieran de escaparate para conseguir la financiación necesaria para crear becas de investigación. El centro educativo pionero en dar estos primeros pasos fue la Universidad Johns Hopkins de Baltimore, que estableció cursos de posgrado y fomentó la investigación matemática, creando en 1878 la *American Journal of Mathematics*, la primera revista de matemáticas que hubo en Estados Unidos. Diez años más tarde se fundó la Sociedad Matemática de Nueva York, que además de acoger a cualquier docente que se dedicara a las matemáticas, también hacía lo propio con ingenieros, estudiantes y cualquiera que estuviera inte-

resado en esta ciencia. El número de asociados fue rápidamente en aumento y se extendió por todo el país, por lo que en 1894 pasó a llamarse Sociedad Matemática Americana (American Mathematical Society, más conocida por su sigla, AMS).

En 1861 fue creado el Instituto Tecnológico de Massachusetts (Massachusetts Institute of Technology, o MIT), que muy pronto se convertiría en uno de los grandes centros de enseñanza de Estados Unidos, pero como su propio nombre indicaba, fue creado con el ánimo de acumular entre sus estudiantes conocimientos de tipo técnico antes que científico. En aquel tiempo, la política educativa imperante seguía priorizando la tecnología, de la que esperaba resultados prácticos, relegando a un segundo plano la investigación en ciencias básicas. Sin embargo, la necesidad creciente de una buena preparación en física y en matemáticas

GOTINGA Y EL NAZISMO

Uno de los muchísimos errores que cometieron los alemanes fue el de eliminar de su comunidad científica a cualquiera que fuera judío, lo que incluyó a un buen número de físicos y matemáticos que hipotéticamente podían haber colaborado en la fabricación de una bomba nuclear. Aparte de algunas excepciones como Werner Heisenberg o Wernher Von Braun, ya antes de la guerra la Alemania nazi comenzó a llevar a cabo un vaciado alarmante de científicos bajo la premisa de que la ciencia judía no podía ser fiable. Frente a esta política, cabe destacar la postura que David Hilbert mantuvo siempre frente a las ideologías políticas que, para tratar de justificar sus fechorías, intentaban involucrar a científicos e intelectuales en sus panegíricos. Ya había tomado un partido claro en el comienzo de la Primera Guerra Mundial, cuando se negó a firmar un manifiesto en el que el Gobierno alemán pretendía justificar intelectualmente sus acciones de guerra. Cuando el nazismo impuso sus criterios selectivos, básicamente racistas, para decidir quién tenía derecho a ejercer determinados cargos públicos, Hilbert movió cielo y tierra, amparándose incluso en la Constitución de Weimar, para que los matemáticos más emblemáticos no fueran expulsados de Gotinga. Sin embargo, fue una batalla perdida, de la que da testimonio la respuesta que dio al ministro nazi de Educación, cuando le preguntó qué tal progresaban las matemáticas en Gotinga, una vez se la había limpiado de judíos. La respuesta fue muy breve: «Ya no hay matemáticas en Gotinga».

para las mismas carreras técnicas, junto con la información que llegaba de Europa de la recién nacida mecánica cuántica, sensibilizó a un sector importante de científicos que veían la necesidad de crear facultades en las que se impartieran áreas tan novedosas como la física teórica. Los recursos económicos para este tipo de iniciativas recayó en el sector privado, que empezó a financiar algunos proyectos universitarios mediante fundaciones y donaciones. Una de las más destacadas fue la fundación Rockefeller, que se convirtió en uno de los buques insignia en promover la introducción de los más modernos avances científicos en las universidades. Su director, Abraham Flexner (1866-1959), fue el promotor para la creación de un centro de investigación que se inauguró en el área de las matemáticas y que se construyó en las inmediaciones de Princeton, dando lugar al nacimiento del Instituto de



Berlín, 1933. Quema de libros de autores judíos y de otros considerados antigermanos.

Estudios Avanzados de Princeton (Institute for Advanced Study, IAS), que acabaría siendo uno de los centros de investigación en matemáticas más importantes del mundo. Uno de sus miembros más destacados fue Oswald Veblen (1880-1960), un matemático estadounidense de prestigio internacional que sabía coordinar con eficacia su actividad como científico y como organizador y que asumió, entre otras, la tarea de organizar el centro e intentar reclutar a matemáticos de prestigio para que trabajaran en él.

Se inició así una nueva época en la que por primera vez el flujo de científicos que cruzaban el Atlántico se invirtió. Ya no serían los norteamericanos los que irían a ampliar conocimientos a Alemania, sino los alemanes los que cruzarían el Atlántico para investigar en Estados Unidos, una inmigración que se vio favorecida por el advenimiento de la Alemania nazi.

«Podría parecer que hemos llegado al límite de lo que es posible lograr con la tecnología informática, aunque hay que tener cuidado con tales declaraciones, ya que tienden a sonar bastante tontas en cinco años.»

— John von Neumann.

A principios del siglo xx, Gotinga seguía siendo el referente mundial de la investigación matemática, pero en Estados Unidos había surgido un centro capaz de emularlo y de alcanzar su mismo nivel de reconocimiento: Princeton.

Oswald Veblen y Von Neumann se conocieron en el Congreso Internacional de Matemáticas que se celebró en Bolonia en 1928. No sería arriesgado decir que el futuro de Von Neumann se decidió en aquel encuentro. Además del intercambio de conocimientos científicos, propio de un congreso de esa naturaleza, Veblen le hizo partícipe en su proyecto de crear en Princeton un centro de investigación dedicado a las matemáticas puras y también a otra área, en la que Von Neumann había mostrado un especial interés, que era la física matemática. Estados Unidos ya se había configurado como el país de las oportunidades, como la tierra prometida. Von Neumann era consciente de ello y Veblen le estaba abriendo

una puerta. El empujón final se lo daría la dramática situación en la que se vería comprometida Europa en los años anteriores a la Segunda Guerra Mundial.

PRIMEROS CONTACTOS

Desde el comienzo, Von Neumann fue especialmente crítico con el nazismo. De todas maneras, no se puede decir que como científico judío, sus emigraciones a Alemania y posteriormente a Estados Unidos fueran motivadas por las persecuciones antisemitas, ya que en ambas ocasiones los motivos fueron encontrar mejores oportunidades de trabajo.

Von Neumann se casó en diciembre de 1929 con Mariette Koevesi, una novia de la adolescencia, hija de un médico de Budapest. Para poder formalizar la boda, Von Neumann se vio obligado a convertirse al catolicismo, a lo que no puso ninguna objeción, a pesar de haber nacido en el seno de una familia judía tradicional. El fruto de dicha unión fue Marina, su única hija, nacida en 1935. Al año siguiente de la boda, Von Neumann fue aceptado como profesor visitante en la Universidad de Princeton y en 1933 fue nombrado profesor titular en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Por aquel entonces tenía veintinueve años y era el profesor más joven de una prestigiosa institución que albergaba despachos de personalidades del mundo de la ciencia como Einstein, Dirac, Turing o Gödel.

El acceso escalonado a los diferentes puestos de trabajo a los que Von Neumann se vio obligado a ocupar no estuvo determinado por motivos académicos en los que se cuestionara su valía profesional, sino que era debido a la situación política y económica de Estados Unidos que, en aquellas fechas, afectaba a las leyes de inmigración. Cuando las depuraciones nazis se hicieron extensivas más allá de las fronteras alemanas, implicando a países como Checoslovaquia, Hungría, Polonia o Italia, los científicos de origen judío se vieron obligados a emigrar, siendo muy pocos los países a los que podían optar. Sin duda, Estados Unidos era el

destino preferido, pero ser admitido en ese país no era una tarea fácil. La crisis económica había obligado a prescindir de muchos puestos de trabajo y el sector académico no se salvó de la criba. Los profesores que habían mantenido su plaza se veían obligados a emplear casi la totalidad de su jornada laboral en impartir clases. Estar en posesión de un contrato académico que permitiera dedicarse en exclusiva a la investigación era todo un lujo y la llegada masiva de científicos de Europa se percibió como una amenaza ante la escasez de puestos de trabajo.

A pesar de estas condiciones adversas, gracias a su ya consolidado prestigio internacional, Von Neumann consiguió ascender rápidamente en el escalafón administrativo para consolidar su posición académica en Estados Unidos. De hecho, obtuvo la nacionalidad estadounidense en 1937, el mismo año en que iniciaría sus actividades como colaborador del Laboratorio de Investigación Balística (Ballistics Research Laboratory).

Como profesor, es decir, impartiendo clases, estuvo un período relativamente corto, de 1930 a 1933, algo que el alumnado corriente agradeció, ya que Von Neumann no se distinguía por sus cualidades docentes. Lo hacía todo deprisa, sin entretenerse en explicaciones y sin que sus alumnos tuvieran apenas tiempo de tomar apuntes.

Von Neumann dedicó los años anteriores a la guerra a la investigación básica. En colaboración con Garrett Birkhoff, en 1936 publicó «La lógica de la mecánica cuántica», y entre 1936 y 1937, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, las «Lecciones sobre geometría continua», que asentaría las bases para el posterior desarrollo de la teoría de retículos.

Aquellos fueron años agitados, de constantes viajes a Europa y también por el interior de Estados Unidos; fueron agitados no solo profesionalmente, sino también en su vida privada. A los dos años de su matrimonio, su mujer se enamoró del físico J.B. Kuper, y abandonó a Von Neumann llevándose con ella a su hija Marina, para fijar su residencia provisional en Nevada, estado en el que los trámites para conseguir el divorcio eran más fáciles. Los motivos que Mariette adujo para ello fueron en términos de «abuso y crueldad». Esto ha sido utilizado en ocasiones para denunciar

serios defectos en la personalidad y la estabilidad emocional de Von Neumann, para poner de manifiesto el tópico de la incompatibilidad del genio con su capacidad para relacionarse con los demás. Sin embargo, esto último no es cierto, ya que hay constancia de que esas fueron razones de mutuo acuerdo que tenían como único objetivo acelerar los trámites necesarios. Posteriormente al divorcio, Von Neumann y Mariette siempre mantuvieron una relación cordial. Pactaron que su hija permaneciera con su madre hasta los doce años, para luego pasar la adolescencia viviendo con su padre. Mariette consideró que era un privilegio que su hija pudiera vivir ese importante período de la vida junto a un hombre del talante de Von Neumann.

> «Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida.»
>
> — John von Neumann.

Hasta 1936, Von Neumann pasó todos los veranos en Europa, hasta que el nazismo hizo imposible la vida de los científicos y de la mayoría de la gente, tanto en Alemania como en los países ocupados. En el otoño de 1938, Von Neumann solicitó un permiso en la Universidad de Princeton para hacer un viaje en el que debía resolver ciertos asuntos personales. Iba a casarse de nuevo, esta vez con Klara Dan, una antigua novia de la que volvió a enamorarse en uno de los muchos viajes que hizo a Europa antes de la guerra. Klara estaba casada, y a pesar de proceder de una familia de la alta burguesía de Budapest, consiguió el divorcio con cierta facilidad. Aquel mismo otoño, Klara le había escrito una carta comunicándole su angustia por la situación política y la necesidad de emigrar a un país como Estados Unidos. Von Neumann no se lo pensó dos veces y fue a su ciudad natal para casarse por segunda vez. En aquel viaje, el último que realizó a Europa, Von Neumann no quiso renunciar a ninguna de las visitas que tenía programadas, especialmente la del físico danés Niels Bohr (1885-1962) en Copenhage. No hay que olvidar que por aquellas fechas todos estos desplazamientos comportaban ciertos riesgos, ya que

transcurrían en una Alemania cada vez más controlada por los nazis. El 17 de noviembre, Von Neumann y Klara Dan se casaron y al cabo de pocos días cruzaron Europa para embarcarse en el *Queen Mary*, que les llevaría a Estados Unidos para establecer su residencia definitiva. Con el tiempo, toda la familia de Von Neumann acabaría residiendo en Estados Unidos.

COMPUTACIÓN

La física nace de la observación de fenómenos que se repiten y que inducen al científico a diseñar un escenario en el que sea capaz de recrear dichos fenómenos, de reproducirlos con la mayor fidelidad posible o de hacer mediciones precisas en el caso de que se trate de fenómenos naturales imposibles de recrear a escalas razonables. El objetivo final suele ser el de poder encontrar una ley que, aunque no sea capaz de explicar totalmente la naturaleza del fenómeno, sí pueda predecir lo que sucederá en el futuro. En este sentido, se podría decir que la física es la ciencia de la predicción. Por ejemplo, en el caso de la gravitación, se observa que los cuerpos son atraídos por la Tierra. Se pueden llevar a cabo experimentos dejando caer diferentes objetos desde diferentes alturas y hacer mediciones, que es lo que en su momento hizo Galileo. Todos los datos obtenidos figuran en el escenario de lo que se denomina física experimental y, en el mejor de los casos, acaban conduciendo al establecimiento de una ley, que es lo que hizo Newton al definir la ley de la gravitación universal mediante una fórmula que describía con precisión cómo dos masas cualesquiera se atraen entre sí. Hasta ahora, nadie ha sido capaz de explicar «por qué» dos masas se atraen, pero sí sabemos «cómo» lo hacen, lo que nos permite hacer predicciones precisas sobre el comportamiento de una masa que está sometida a los efectos de un campo gravitatorio.

El resultado final de un proceso de estas características es una o varias fórmulas matemáticas. El advenimiento del cálculo infinitesimal dio lugar a que esta y otras leyes pudieran ser trata-

das con herramientas matemáticas, lo que casi siempre da lugar al nacimiento de nuevas fórmulas que, a su vez, tienen nuevas interpretaciones físicas.

Cuando hablamos de la física en estos términos, lo hacemos refiriéndonos a ella como a una ciencia básica. Pero, siguiendo con el ejemplo, la ley de la gravitación puede ayudarnos a calcular cuál es el comportamiento de una masa que es proyectada al espacio con una velocidad y una inclinación determinadas. Se sabe que su trayectoria seguirá una parábola, de la que conocemos su ecuación, gracias a la cual podemos determinar la altura y el alcance máximo que tendrá, el tiempo que empleará en realizar todo el recorrido y la velocidad que tendrá en cualquier punto de su trayectoria. Todos estos datos son vitales para el lanzamiento de proyectiles. Esto es física aplicada, aquella rama de la física en la que se abandona el escenario de las ciencias básicas, para acabar adentrándonos en el campo de la tecnología. El esquema es aparentemente simple: observación, medición, hipótesis, leyes que tengan reflejo en ecuaciones matemáticas, aplicaciones prácticas y diseño de dispositivos tecnológicos. Pero, como sucede en cualquier explicación esquemática, esta ruta adolece de un exceso de simplificación. Las cosas no suelen ser tan sencillas, ni los procesos evolucionan en una sola dirección. Lo que acaba pasando es que hay que caminar hacia delante y hacia atrás varias veces. El dispositivo final —que podría ser un cañón o un cohete intercontinental— no funciona nunca a la primera, lo que obliga a replantearse la teoría y a reformularse las ecuaciones.

Habitualmente, entre los especialistas que trabajan en los grandes proyectos científicos o tecnológicos hay matemáticos, físicos y tecnólogos en diferentes áreas. Entre los matemáticos, los hay que se dedican más a las matemáticas teóricas y otros a las matemáticas aplicadas. En la actualidad, esta distinción está clara, pero cuando Von Neumann empezó a trabajar en Estados Unidos, dicha distinción apenas existía. Si ha habido un matemático capaz de reunir en una sola mente una visión completa de las matemáticas puras y de las aplicadas, ha sido precisamente Von Neumann.

No siempre, pero la mayoría de las veces, el nexo que une las matemáticas puras y las aplicadas son las ecuaciones.

Una ecuación puede ser planteada, pero eso no quiere decir que pueda ser resuelta. A lo largo de su historia, las matemáticas han dedicado siglos a la resolución de ecuaciones. Siempre ha sido uno de sus temas prioritarios, lo que tiene una clara razón de ser. Si tenemos una ecuación que nos permite calcular todos los elementos de la trayectoria de un proyectil, pero no sabemos cómo resolverla, de poco nos servirá.

Resolver una ecuación es encontrar las soluciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x+3=5$$

tiene como solución $x=2$.

Sin embargo, una ecuación como

$$x^2-3x+2=0$$

no tiene una solución tan obvia. Podríamos ir probando soluciones para ver si acabamos acertando con la correcta, pero sucede que este tipo de ecuaciones sí saben resolverse. Se trata de una ecuación de segundo grado cuyo método de resolución se enseña en los colegios y que suele aprenderse más o menos a los catorce años. Esta ecuación tiene un algoritmo de resolución que nos proporciona dos números 1 y 2, que son las soluciones de la ecuación. Si no conociéramos el algoritmo, no nos quedaría más remedio que ir probando soluciones. En este caso concreto las hallaríamos rápidamente, pero en una ecuación como

$$2{,}34x^4+23{,}56x^3-0{,}65x^2+11{,}370x-36{,}62=0$$

el tanteo supone una tarea ingente con pocas probabilidades de éxito. Una alternativa sería encargarle el trabajo a una máquina. Actualmente, la velocidad de cálculo de los procesadores hace

que un planteamiento de estas características parezca razonable. El trabajo de un matemático en estas lides puede resultar muy útil, no solo para la determinación de las ecuaciones, sino también para acotar el rango de las soluciones. Por ejemplo, saber que los números que estamos buscando se encuentran entre 0 y 10, sin duda facilitará la búsqueda de soluciones por tanteo.

Durante el primer período de su estancia en Estados Unidos, cuando empezó a trabajar para el Laboratorio de Investigación Balística, Von Neumann estuvo investigando el problema que planteaba la turbulencia hidrodinámica, lo que se entiende por «mecánica de medios continuos», una herramienta esencial en el terreno de la balística y en la que intervienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de una gran complejidad analítica. Su enfoque se dirigió entonces hacia la resolución de dichos sistemas por métodos numéricos, de ahí que estuviera tan interesado en las posibilidades que para ello ofrecían las nuevas máquinas de computación electrónica. Von Neumann ya sabía que los cálculos iban a suponer un escollo importante. Obviamente, no se trataba de ecuaciones de segundo grado, sino de ecuaciones para las que no se disponía de un algoritmo de resolución. Todo ello iba a requerir de horas de cálculo manual o, expresado con otro término, de cómputos. Así, se les llamaba precisamente computadores al equipo de personas que trabajaba realizando todos estos cálculos —o computadoras, si se tiene en cuenta que, por el motivo que fuere, siempre había más mujeres que hombres realizando cálculos—.

LAS PRIMERAS COMPUTADORAS

Uno de los significados de la palabra inglesa *computer* es «calculador», «el que computa». Según esto, la historia de la computación debería hacer referencia a objetos capaces de hacer un cálculo, en el sentido de hacer cuentas (operaciones aritméticas) de forma automática. De esta manera, en un sentido genérico, el término «computadora» se emplea para designar un dispositivo al que se le dan unos datos de entrada *(input)* y del que esperamos un resultado, o sea, unos datos de salida *(output)*.

El nivel de automatismo y la complejidad de las operaciones efectuadas son dos factores determinantes en el desarrollo de la computación. La diferencia entre tener que mover las fichas de un ábaco con la mano, o que esta acción la lleven a cabo dispositivos electromecánicos, señala un avance tecnológico. Que el dispositivo en cuestión esté diseñado para efectuar sumas en las que intervienen números de varios dígitos o que sea capaz de resolver ecuaciones diferenciales, también es una cuestión técnica, aunque de otra naturaleza. En cualquier caso, los dispositivos de cálculo surgen ante la necesidad de aliviarnos del penoso trabajo de tener que realizar tareas de cálculo totalmente mecánicas en las que no se exige pensar, sino llevar a cabo un proceso absolutamente rutinario y susceptible, por tanto, de responder a las instrucciones de un programa.

A diferencia de las ciencias básicas, en las que la aportación de una sola persona puede producir un resultado sorprendente, en tecnología, el desarrollo suele ser más lento y se produce de forma escalonada. Fabricar mecanismos de ruedas dentadas, ejes y acoplamientos no solo requiere un diseño adecuado, sino también de una industria capaz de fabricar las piezas. Esta es la razón por la que las famosas máquinas —analítica y diferencial— del científico de la computación británico Charles Babbage (1791-1871) estuvieron condenadas al fracaso. Buena prueba de ello es que en la actualidad se han construido, con ánimo museístico, máquinas de Babbage que funcionan perfectamente. Aun así, a estas máquinas se las considera como el gran hito de la era mecánica de la computación, especialmente si se contemplan junto a la presencia de la matemática británica Ada Augusta Byron (1815-1852), condesa de Lovelace, responsable del primer lenguaje de programación de la historia, que significó la aparición de un elemento decisivo a tener en cuenta en la evolución de la computación, lo que actualmente entendemos por *software*, el programa. A partir de entonces, la computadora pasó a tener «cuerpo y alma», es decir, *hardware* y *software*. En este aspecto, cabe destacar la publicación en 1854 de *Las leyes del pensamiento* del matemático británico George Boole (1815-1864), obra en la que tiene lugar el nacimiento de las llamadas «álgebras booleanas», una nueva álgebra de la lógica en la que las variables solo pueden tomar dos valores, 0 y 1, y en la

que operan tres funciones elementales: AND (y), OR (o) y NOT (no), en base a las que se construirían las futuras puertas lógicas de las modernas computadoras. En esta época precedente a las diferentes generaciones de computadoras, también hay que hacer una especial mención al año 1801, fecha en la que aparece el telar automático del comerciante francés Joseph Jacquard (1752-1834), basado en una serie de tarjetas perforadas capaz de conservar una determinada información de procesos repetitivos.

El inicio de la nueva generación de computadoras se suele datar en 1890, coincidiendo con el censo de la población que el Gobierno de Estados Unidos quería llevar a cabo y para el cual tenía prevista una duración de diez años. Con el dispositivo de Herman Hollerith (1860-1929), basado en las tarjetas perforadas de Jacquard para el *hardware* y en las álgebras de Boole para el *software*, el censo se llevó a cabo en un tiempo récord de dos años. A raíz de este trabajo, en 1924 se fundó la primera empresa dedicada a la fabricación de este tipo de máquinas calculadoras, la International Business Machines Corporation (IBM).

Von Neumann introdujo el uso de tarjetas perforadas en los primeros cálculos matemáticos con computadoras. Su hermano Nicholas afirmaba que esta idea le surgió en una conversación que tuvieron en una sobremesa, cuando todavía vivían en Budapest, en casa de sus padres. En aquellas conversaciones familiares era frecuente que el padre, siempre interesado en atraer a sus hijos al mundo de los negocios, explicara con cierto detalle las implicaciones sociales y culturales a las que llevaba la economía. Hacía poco que la entidad bancaria que Miksa Neumann dirigía había invertido en una innovadora empresa textil para la adquisición de los telares Jacquard.

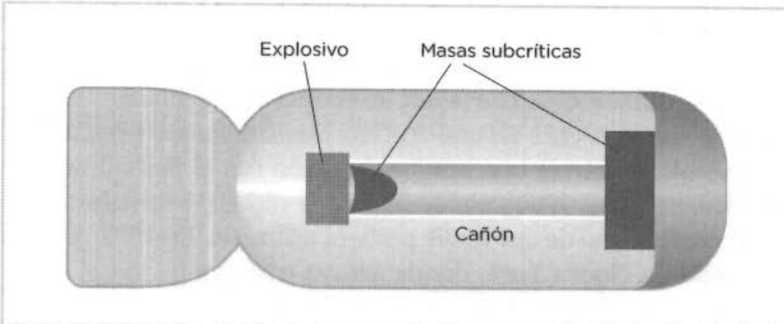
Von Neumann sabía de la importancia de relacionar muy estrechamente la teoría y la práctica mediante los resultados experimentales; el *feedback* que se obtenía de los experimentos permitía hacer ajustes en la teoría. Sin embargo, era necesario que los resultados obtenidos en los cálculos fueran lo más ajustados posible. La introducción de nuevos métodos de cálculo había supuesto un gran avance en la historia de la ciencia y Von Neumann creía firmemente que la introducción de las computadoras iba a

tener en ese sentido un papel similar. Pero, para ello, era necesario introducir nuevas técnicas en el cálculo numérico. En este campo destacan sus aportaciones en las técnicas de estabilidad numérica en el cálculo de matrices inversas y en el de aproximación de funciones que presentan discontinuidades de salto.

Los trabajos realizados por Von Neumann en trayectorias balísticas y ondas de expansión le convirtieron en un experto reclamado por los estamentos militares. No obstante, esto no era más que la antesala de un experimento que significaría uno de los grandes logros de la investigación científica y, desgraciadamente, también uno de los mayores hitos de la historia por lo que respecta a la capacidad de destrucción del ser humano. Von Neumann acabaría siendo uno de los científicos más implicados en el proyecto.

LA BOMBA ATÓMICA

Año 1944. Los aliados empezaban a creer que tenían probabilidades de ganar la guerra, pero todavía no estaban del todo convencidos. Rommel había perdido la batalla en el norte de África, los italianos ya no querían seguir en el bando de Hitler y las fuerzas norteamericanas habían conquistado Sicilia, un enclave estratégico para dominar el Mediterráneo. La gran apuesta de Stalingrado la ganaron los rusos, que por primera vez avanzaban en lugar de retroceder, aunque fuera ralentizados por el mal estado del terreno que había dejado uno de los inviernos más crudos en el este de Europa. Pero la guerra todavía está lejos de terminar. El ejército alemán se mantienía blindado en los países ocupados y ni un solo soldado de las fuerzas aliadas podía poner los pies en ellos. En septiembre de ese mismo año, la Wehrmacht lanzaba el V2 —sucesor de la bomba V1—, el primer cohete con objetivos militares, que había sido construido en la planta secreta de Peenemünde bajo la dirección del ingeniero espacial Wernher von Braun. Se trataba de un arma que generaba el pánico sobre las poblaciones a las que iba dirigida, entre otras cosas porque era muy difícil de interceptar y porque ni siquiera se la oía llegar, ya que viajaba a una velocidad superior a la



Esquema del mecanismo de implosión en el que una de las masas subcríticas es disparada mediante un explosivo convencional para impactar sobre la otra masa subcrítica.

del sonido. Era un dispositivo bélico de efectos psicológicos, pero como arma militar tenía una eficacia muy cuestionable. De hecho, murieron más personas en su proceso de fabricación que por los efectos destructivos de sus explosiones al alcanzar el blanco. Sus mayores defectos pivotaban sobre dos factores; el primero era la escasa precisión en los dispositivos de navegación, y el segundo, la relativa poca potencia de su ojiva explosiva, 975 kg de amatol, que dirigidos con precisión hacia un objetivo concreto podían ser letales, pero que en el caso de caer en campos próximos a áreas urbanas —como sucedió en la mayoría de las ocasiones—, sus efectos se limitaban a producir un cráter de dimensiones moderadas.

Los alemanes se jactaban de poseer un arma secreta que podía dar un vuelco a la contienda y hacer que pudieran ganar la guerra. Obviamente, no se trataba de mejorar los sistemas de navegación, sino de sustituir la carga explosiva por otra cuyos efectos fueran tan devastadores que la precisión en el impacto se convirtiera en un asunto menor. Los alemanes se habían propuesto construir la primera bomba atómica de la historia. Tenían a su alcance todos los medios necesarios para ello, ya que disponían de toda el agua pesada que se producía en la planta noruega Norsk Hydro y de la mayor reserva mundial de uranio procedente del Congo Belga. En ese sentido llevaban una clara ventaja, pero habían perdido la ocasión de contar con un auténtico monopolio de mentes privilegiadas.

La primera bomba atómica se basaba en un proceso de fisión nuclear del uranio enriquecido que comportaba una disminución de masa (véase la figura). La teoría de la relatividad de Einstein

había dejado establecido mediante su conocida ecuación $E = m \cdot c^2$ que la disminución de masa comporta el aumento en la energía —ya que c, la velocidad de la luz, es un factor constante—. El primero en darse cuenta de que con los conocimientos disponibles era posible construir una bomba de fisión fue el físico húngaro Leó Szilárd (1898-1964); de hecho, él la diseñó y la patentó en 1933 con el ánimo de que nadie pudiera utilizarla. En 1939, Szilárd se trasladó a Nueva York, donde estuvo trabajando con el físico italiano Enrico Fermi (1901-1954) en el primer reactor nuclear de la historia. Fue entonces cuando se decidió que el uranio era un elemento apto para provocar una reacción en cadena.

Frente a la alarma que causó el saber que los alemanes estaban ya trabajando en la construcción de la primera bomba de fisión, el propio Leó Szilárd, junto con Edward Teller (1908-2003) y Eugene Wigner (1902-1995) —los tres húngaros y también judíos— convencieron a Einstein para que, valiéndose de su prestigio, escribiera una carta dirigida al presidente Roosevelt advirtiéndole del peligro. Y fue así como nació el Proyecto Manhattan.

EL PROYECTO MANHATTAN

El 7 de diciembre de 1941, el presidente de Estados Unidos, Franklin Delano Roosevelt, autorizó la fabricación de una bomba atómica.

Se formó un equipo interdisciplinar con la colaboración de diferentes departamentos de las universidades de Columbia, California y Chicago. El objetivo era fabricar la primera bomba de fisión nuclear. El cargo de director científico del proyecto recayó en el físico Robert Oppenheimer (1904-1967), siendo el responsable militar el general Leslie Groves (1896-1970). En total, en el Proyecto Manhattan participaron más de 125 000 personas. Quizá uno de sus mayores méritos fuera del ámbito científico, si no el único, fue que acabara siendo uno de los secretos mejor guardados de la historia. En él participaron científicos de gran renombre internacional, como Richard Feynman, Edward Teller, Enrico Fermi, Richard Wilkins, Stanislaw Ulam, Louis Slotkin o Klaus Fuchs; y también

Von Neumann, que fue quien diseñó prácticamente la totalidad del mecanismo de ignición.

Von Neumann, que llevaba tiempo trabajando en hidrodinámica de fluidos, diseñó un dispositivo que mediante una detona-

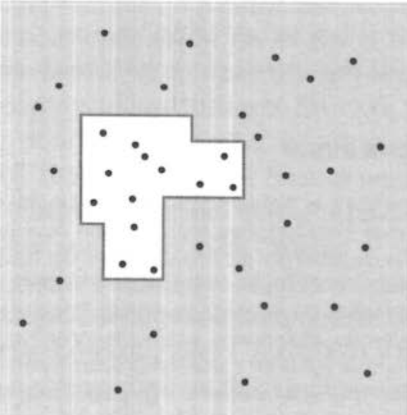
OAK RIDGE

En 1942, el Gobierno de Estados Unidos construyó en Oak Ridge (Tennessee) unas instalaciones secretas que ocuparon más de 24000 hectáreas con el fin de albergar las instalaciones del Proyecto Manhattan y a todos los trabajadores, incluyendo técnicos y científicos, que formaron una comunidad de decenas de miles de personas. Todo el recinto estaba vigilado por tropas del ejército. Muy pocos, entre ellos Von Neumann, podían entrar o salir del recinto, que tenía un cartel en la entrada en el que podía leerse el siguiente aviso: «Lo que veas, hagas u oigas aquí, cuando salgas de aquí, debe quedar aquí».



Cartel situado en la entrada de la planta de Oak Ridge, apelando al secretismo de las operaciones que se llevaban a cabo en su interior.

EL MÉTODO MONTECARLO



El método Montecarlo es un método numérico que se utiliza en estadística para conseguir aproximaciones precisas a expresiones matemáticas complejas para las que no existe un algoritmo de cálculo. Consiste fundamentalmente en la simulación de variables aleatorias. Una de las máquinas más sencillas que se conocen para la generación de números aleatorios es la típica ruleta de un casino, de ahí que al método se le pusiera el nombre de uno de los lugares míticos en lo que a juegos de azar se refiere. Muchos profanos en el tema creen que se trata de un método para ganar en el juego de la ruleta, pero este método estadístico no tiene nada que ver con los juegos de casino. Hay una manera sencilla de ilustrar la idea básica que sustenta el método Montecarlo. Imaginemos que tenemos un recinto cuadrado de lado uno, en cuyo interior hay una figura geométrica de forma caprichosa de la que queremos calcular el área (véase la figura).

ción provocara una onda de choque que produjera una súbita reducción del núcleo de plutonio. El volumen de dicho núcleo era lo suficientemente grande como para que la masa de plutonio fuera inferior a la masa crítica. Al producirse una reducción homogénea del volumen, el núcleo pasaba a tener masa supercrítica. El modelo matemático sobre el que se sustentaba el dispositivo requería la solución de un sistema de ecuaciones en diferencias finitas, para cuya resolución necesitaba el concurso de un ordenador capaz de ejecutar una enorme cantidad de complejas operaciones en el menor tiempo posible. Von Neumann estableció los algoritmos necesarios para la resolución de las ecuaciones, pero es muy probable que sin la ayuda de las computadoras la propuesta no hubiera sido viable.

También podríamos haber elegido como ejemplo cualquier figura de lados curvos y, por supuesto, cualquiera que estuviera definida por una función matemática. Se colocan ahora *N* puntos de forma aleatoria. Un escenario aleatorio podría ser el número de bolas de granizo que han caído dentro del recinto cuadrado después de una granizada. Contamos luego el número de puntos *N'* que hay dentro de la figura cuya área queremos calcular. Supongamos que $N=40$ y $N'=13$. El cociente $N/N'=0{,}32$ es una aproximación al área que estamos buscando. Es fácil demostrar que el error cometido es proporcional a una cierta magnitud, de forma que para cada nueva cifra decimal que queramos obtener será necesario aumentar el volumen de cálculo en cien veces; de esta manera, aunque el método responda a un algoritmo sencillo, requiere del uso de herramientas computacionales. El método fue desarrollado por Von Neumann a raíz de una idea que le propuso el matemático polaco-estadounidense Stanislaw Ulam (1909-1984), que fue invitado por Von Neumann para participar en el Proyecto Manhattan. Ulam reconoció que la idea surgió en una ocasión en que estaba jugando a un complicado solitario en el transcurso de una enfermedad. Pensó que, en lugar de realizar un cómputo detallado de cada una de las posibilidades de resolución del juego, era más interesante llevar a cabo pruebas aleatorias contando el número de cartas que habían intervenido en la solución. Von Neumann aplicó el método para detectar neutrones generados por un material radiactivo a lo largo del radio de una esfera. En 1947 envió una propuesta formal al Laboratorio Nacional de Los Álamos en un documento que constituye el primer testimonio escrito que se tiene de una descripción formal del método Montecarlo.

El Proyecto Manhattan duró 2 años, 3 meses y 16 días. La primera bomba atómica de la historia fue detonada en el desierto de Alamogordo el 16 de julio de 1945.

EL ENIAC

En julio de 1943 empezó a construirse un nuevo ordenador en la escuela Moore de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Pensilvania, situada en Filadelfia, que marcaría un hito en la historia de la computación; se le dio el nombre de ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer). Se trataba de un proyecto de máxi-

mo secreto cuyo nombre en clave era PX. El ENIAC está considerado como el primer ordenador de la historia, aunque algunos piensan que la progenitura se le debería dar a la Colossus, puesta en funcionamiento a mediados de febrero de 1944 en Bletchley Park, una instalación militar localizada en Buckinghamshire, Inglaterra. La Colossus, inspirada por el científico de la computación Alan Turing (1912-1954) y diseñada por el matemático Max Newman (1897-1984), fue utilizada para descifrar la máquina Enigma.

El ENIAC costó cerca de 8000 dólares y fue financiado por el ejército. Medía 30 metros de largo y pesaba 32 toneladas. Funcionaba con 17468 válvulas de vacío que disipaban tanto calor que la temperatura de la habitación en la que estaba ubicado podía subir

LA EDVAC, UN PASO ADELANTE



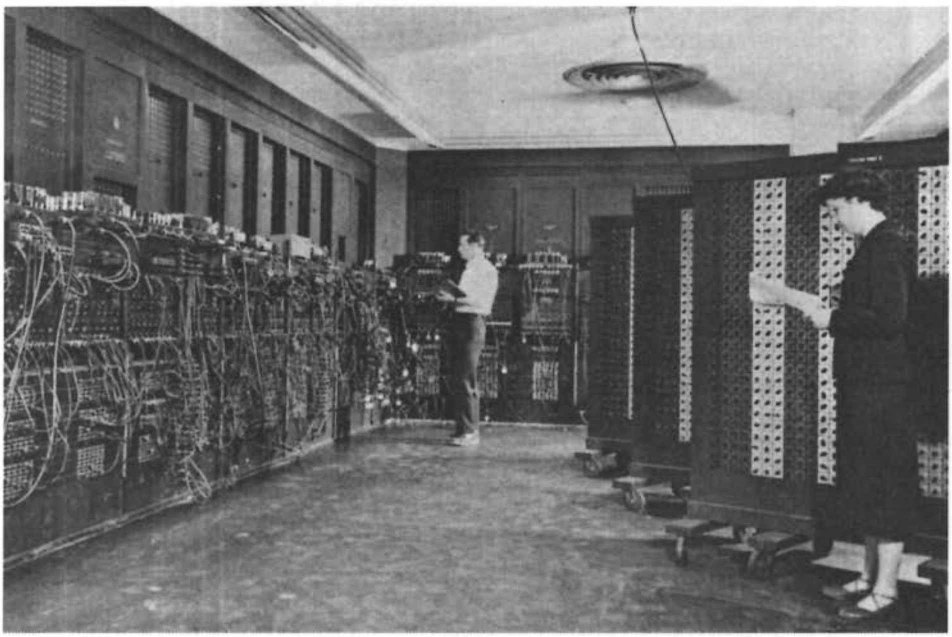
John von Neumann (izquierda) y Robert Oppenheimer junto a la EDVAC.

A pesar de los avances que Von Neumann había introducido, el ENIAC adolecía de serias limitaciones. Después de la guerra, Von Neumann colaboró en el diseño y la construcción de una nueva computadora que corrigiera los errores y mejorara las prestaciones del ENIAC. La nueva máquina, la EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer), mejoraba mucho la velocidad de la anterior (el ENIAC realizaba 333 operaciones por segundo, mientras que la EDVAC hacía 20000) y además incorporaba totalmente la arquitectura de Von Neumann. Von Neumann no solo se limitó al aspecto estructural de las computadoras, sino que también trabajó en el diseño de algoritmos que permitieran implementar el procesamiento de operaciones matemáticas más complejas que los puros cálculos numéricos que hasta entonces se habían estado realizando con las computadoras. Llegó a desarrollar algoritmos para resolver diferentes tipos de ecuaciones, calcular la inversa de una matriz, encontrar vectores propios y calcular los valores propios correspondientes, así como hallar los máximos y los mínimos para funciones de varias variables.



FOTO SUPERIOR:
Von Neumann y su segunda esposa, Klara Dan, en 1954.

FOTO INFERIOR:
Dos operadores manejando el panel de control principal del ENIAC en la escuela Moore de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Pensilvania, en la década de 1940.



fácilmente hasta los 50 °C. Únicamente podía almacenar veinte números, pero su defecto fundamental era que para cambiar un programa era necesario reconfigurar sus circuitos, de forma muy parecida a como lo hacían las telefonistas en las antiguas centralitas, en una operación que podía llevar varios días. Otro de los problemas serios del ENIAC es que se pasaba más tiempo averiado que en funcionamiento. Aun así, el ENIAC estuvo funcionando diez años y durante ese período realizó más cálculos matemáticos de los que se habían realizado en la historia de la humanidad hasta entonces.

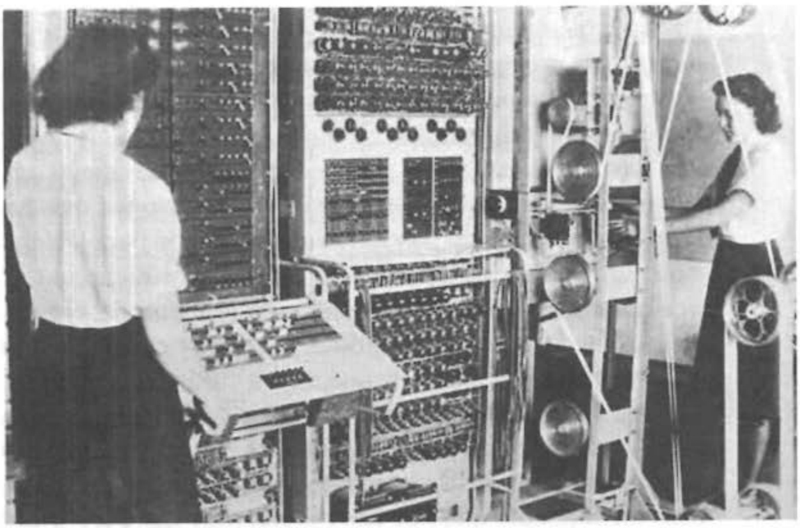
Von Neumann entró en contacto con el ENIAC de forma totalmente casual. El matemático estadounidense Herman Heine

LA COLOSSUS

El matemático británico Alan Turing (1912-1954) está considerado como uno de los padres de la informática actual a raíz de un artículo que escribió en 1931, titulado «Sobre los números computables». Dicho documento fue considerado por la comunidad matemática como uno de los avances más importantes del siglo, en el que se establecían las bases de lo que hoy se conoce como la «máquina de Turing», un esquema teórico que encerraba el fundamento de lo que habrían de ser todos los futuros programas informáticos. A partir de su publicación, Turing inició una carrera ascendente hasta alcanzar el título de profesor de Matemáticas del King's College de Cambridge, donde permaneció hasta que el 4 de septiembre de 1939, un día después de que Inglaterra declarase la guerra a Alemania, fue llamado a formar parte del equipo de criptoanalistas de Bletchley. Este equipo obtuvo importantes éxitos descifrando las claves de la máquina Enigma, utilizada por los alemanes para cifrar sus mensajes. Turing mostró un talento tan extraordinario como descifrador, que acabó por convertirlo en el principal criptoanalista del Reino Unido. El objetivo fundamental del equipo de Bletchley era el arma submarina alemana. Poder descifrar los mensajes que el alto mando enviaba a los submarinos alemanes mediante el código enigma, significaba poderlos interceptar antes de que llevaran a cabo su misión. Turing diseñó entonces una máquina electromecánica para descifrar los códigos, la Colossus. Estas grandes y ruidosas máquinas que recibieron el sobrenombre de «bombas» ocuparon varios cobertizos en Bletchley y fueron claves, no solo para el criptoanálisis diseñado por Turing, sino también como simientes de los futuros ordenadores que llegarían años después. La criptografía estaba ya entonces bajo secreto militar, pero también lo estaban aquellas ruidosas máquinas que se mostraron tan eficaces en el

Goldstine (1913-2004) se alistó en el ejército al comenzar la Segunda Guerra Mundial. Trabajó con el grado de teniente en el BRL, que era el laboratorio de investigación de balística de Aberdeen, en Maryland. Como especialista en la confección de tablas de tiro, era muy consciente de la urgente necesidad de automatizar los engorrosos y largos cálculos mediante la utilización de algún tipo de computador electrónico, motivo por el que aceptó el cargo de hacer de enlace entre la escuela Moore, en Filadelfia, encargada de construir el ENIAC, y Aberdeen. En el verano de 1944, Goldstine se encontró casualmente con Von Neumann en el vestíbulo de la estación de tren de Aberdeen. Debido a los numerosos compromisos

descifrado de mensajes, auténticos ancestros de los actuales ordenadores. Así, no es de extrañar que el ENIAC, el primer computador con el que se enfrentó Von Neumann, estuviera también bajo secreto militar, ya que iba a ser utilizado para fabricar la primera bomba atómica.



La Colossus, uno de los primeros ordenadores de la historia, fue emplazado, en 1943, en las instalaciones militares de Bletchley Park, Inglaterra; entró en funcionamiento en febrero de 1944.

que tenía con diversas instituciones gubernamentales, Von Neumann era de los pocos científicos que no estaba obligado a permanecer en las instalaciones de Alamogordo. Goldstine no le conocía personalmente, pero había asistido a varias conferencias suyas y decidió abordarle. Curiosos por naturaleza, cuando los matemáticos se encuentran tienen una fácil tendencia a interesarse uno por el trabajo del otro. La charla transcurrió sin mayor trascendencia, hasta que Goldstine le dejó caer a Von Neumann que estaba trabajando en la construcción de un nuevo ordenador. En este punto, la actitud de Von Neumann cambió y, según cuenta el propio Goldstine, le sometió a un interrogatorio de tercer grado. El calado de las preguntas le pareció propio de un experto y decidió invitarle al centro de investigaciones de Moore para ponerle directamente en contacto con los ingenieros John Mauchly y Prosper Eckert, que estaban trabajando en el diseño del ENIAC. Lo que nadie aclara en esta anécdota es cómo dos personas que estaban trabajando, cada una de ellas en sendos proyectos de alto secreto, se pusieran a hablar por los codos de sus respectivos trabajos en el vestíbulo de una estación de tren en el que acababan de conocerse.

Nada más plantarse delante de la nueva computadora, Von Neumann le preguntó a Eckert por la estructura lógica del sistema. Aquella fue una pregunta clave para que los ingenieros del ENIAC le abrieran las puertas a una colaboración que ya no cesaría hasta que acabara la guerra. Von Neumann pensó en la posibilidad de diseñar un conjunto de instrucciones que fuera un fiel reflejo de todos los pasos que se daban con papel y lápiz en la resolución de un problema y que, a su vez, este conjunto de instrucciones pudiera ser almacenado en la memoria central. Para que este conjunto de datos pudiera ingresar en la computadora, era necesario dotar a esta de una nueva unidad diferente a aquella en la que se realizaban los cálculos, de manera que por un lado se pudieran entrar indistintamente datos y programas, y por otro recoger los resultados. Al hacer esto, Von Neumann estaba configurando un concepto que hoy nos resulta muy familiar, el *software*.

De esta manera, en 1945, en el Laboratorio Nacional de Los Álamos se empezó a trabajar en el proyecto de un nuevo ordenador que tuviera programas almacenados.

ARQUITECTURA DE ORDENADORES

Lo que actualmente se conoce como «arquitectura de Von Neumann» se corresponde con el concepto de programa almacenado. Hoy en día existen computadoras con programas almacenados, como por ejemplo una calculadora de bolsillo con la que podemos llevar a cabo una serie de complicados cálculos, pero con la que no es posible escribir un texto. En cambio, en un PC, si queremos un determinado programa de tratamiento de textos, basta con instalarlo y ponernos a trabajar. Pero esto no siempre fue así. Como ya se ha dicho, en las primeras computadoras, como el ENIAC, cambiar el programa significaba cambiar el diseño, para lo que había que hacer un croquis con papel y lápiz para luego cambiar el cableado de la máquina.

Von Neumann diseñó varios tipos de recableado para agilizar las operaciones en el ENIAC, pero sabía que por mucho que optimizara el sistema, no dejaría de ser siempre un apaño con serias limitaciones. La idea de Von Neumann fue que los datos del programa, que al fin y al cabo también podían expresarse en bits como ceros y unos, fueran almacenados en la memoria junto con los otros datos. Esto permitía modificar las direcciones de memoria y también los mismos programas durante su ejecución. La mayoría de las computadoras modernas se basan en este tipo de arquitectura.

Los ordenadores construidos con este tipo de arquitectura constan de cinco componentes (véase la figura de la página siguiente):

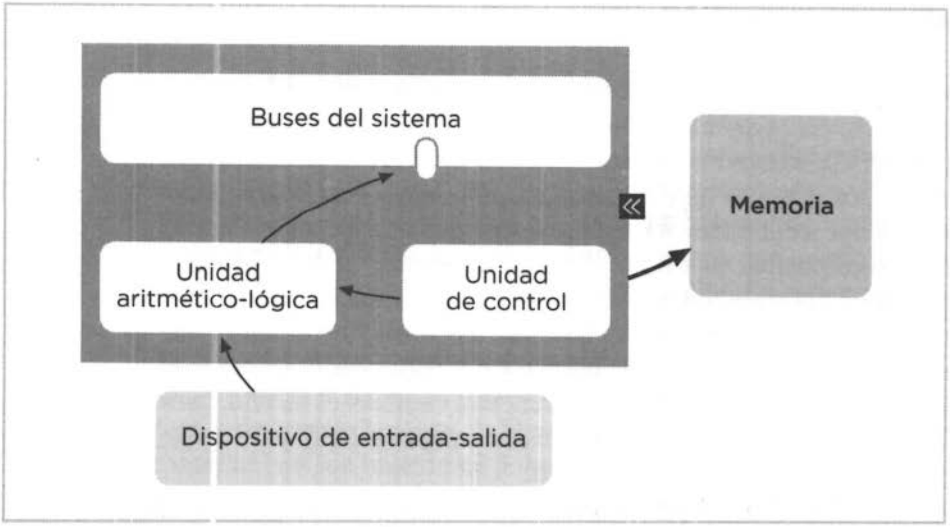
1. Unidad aritmético-lógica.

2. Memoria.

3. Dispositivo de entrada-salida.

4. Unidad de control.

5. Buses del sistema (datos, direcciones y control).



La idea de almacenar las instrucciones junto con los datos tiene un antecedente en un artículo publicado en 1936 por Alan Turing en la London Mathematical Society en el que se daba una descripción detallada de lo que él llamaba la «máquina computadora universal», un modelo teórico de computadora que actualmente se conoce como «máquina de Turing», y que contenía tantos datos como instrucciones con una capacidad de memoria infinita. Es más que probable que Von Neumann conociera la existencia de los trabajos de Turing, ya que ambos estuvieron en contacto durante los años 1936-1937, cuando Turing estuvo en la Universidad de Princeton. Además, el proyecto ya había sido expuesto por Turing en la Universidad de Cambridge en 1935. Es cierto que ambos trabajos, tanto el de Turing como el de Von Neumann, se refieren a ordenadores con programas almacenados. Sin embargo, el trabajo de Von Neumann se publicó antes, por lo que este tipo de arquitectura lleva su nombre.

CAPÍTULO 5

El cerebro electrónico

En los últimos años de su vida, Von Neumann supo conjugar una matemática aplicada, relacionada básicamente con la industria armamentística, con la matemática pura, en una nueva vertiente que le llevó a estudiar la estructura lógica de la reproducción de los seres vivos —los autómatas celulares— y las matemáticas que rigen el funcionamiento del cerebro, considerando a este como una red neuronal que podría llegar a ser simulada por un ordenador.

Al finalizar la Segunda Guerra Mundial hubo una diáspora de científicos que se alejaron de los estamentos militares para regresar al ámbito académico, que a todas luces era su espacio natural de trabajo. En medio de esta nueva realidad del momento, el Departamento de Defensa de Estados Unidos veía cómo el núcleo duro de investigadores, que tan buenos resultados había dado durante el período bélico, se iba reduciendo día a día en un escenario estratégico que, debido al empeño puesto en el desarrollo de las armas nucleares, tenía todavía tintes de guerra, aunque fuera calificada con el eufemismo de «Guerra Fría». A los motivos puramente profesionales de esta diáspora se sumaban otros de índole moral.

La comunidad científica se había dividido en dos grupos claramente diferenciados: por un lado estaban los que no aceptaban colaborar en el incremento del potencial armamentístico nuclear, y por otro, aquellos científicos que lo veían como el único garante para alcanzar una posible paz mundial. Sin ningún lugar a dudas, Von Neumann formaba parte del segundo grupo. Para agravar todavía más la situación, la investigación en el desarrollo de armas de destrucción masiva, en lugar de detenerse, dio un paso de gigante con la aparición en el escenario de la bomba termonuclear, el mayor dispositivo destructivo que jamás había creado el hombre.

LA BOMBA DE HIDRÓGENO

La bomba termonuclear de fusión o bomba de hidrógeno, fue considerada por muchos como el proyecto científico más importante que se había realizado hasta entonces. Los problemas de cálculo que comportaba la construcción de esta bomba eran muy superiores a aquellos con los que se tuvieron que enfrentar los científicos del Proyecto Manhattan. Para la ocasión, Von Neumann diseñó nuevos programas para las modernas calculadoras que ya se habían empezado a construir siguiendo la arquitectura que él mismo había diseñado. Se preguntó si el volumen total de cálculos que había que realizar superaría a los llevados a cabo en toda la historia de la humanidad, aunque rápidamente llegó a la conclusión de que no sería posible si se tenían en cuenta también todos los cálculos que habían realizado los niños en las escuelas durante sus años de aprendizaje.

La bomba de hidrógeno se basa en la energía desprendida al fusionarse dos núcleos de dos isótopos de hidrógeno, deuterio y tritio, para dar como resultado un núcleo de helio, produciendo una reacción en cadena entre neutrones, con la consiguiente generación de energía. Para llevar a cabo esta fusión de los núcleos, es necesario aportar una enorme cantidad de energía, tanta como la que proporciona una explosión nuclear. De esta manera, para conseguir una explosión nuclear se sigue un proceso de fisión-fusión-fisión. En la primera parte del proceso, se provoca una explosión nuclear que produce la energía suficiente para fusionar los núcleos y, a su vez, desencadenar más energía, que es empleada en fisionar nuevos núcleos cuya liberación de energía es el resultado final de la bomba. Se comprende que los cálculos fueran mucho más complicados que los que comportaron el diseño de la primera bomba. Aun así, todo el cómputo se realizó en seis meses, un tiempo récord para la época.

La primera bomba de hidrógeno se hizo explotar el 1 de noviembre de 1952 en Eniwetok, un atolón de las islas Marshall. La temperatura alcanzada en el centro de la explosión fue superior a quince millones de grados. Frente a la multitud de críticas y voces de alarma que se alzaron contra el lanzamiento de la prime-

ra bomba de hidrógeno, Von Neumann defendió el proyecto con un razonamiento cuanto menos curioso. Era consciente de que la contaminación radiactiva suponía una amenaza medioambiental que debía ser tenida en cuenta. Sin embargo, también consideraba que cualquier acción que fuera valorada, de alguna manera comportaba un coste que había que asumir. Para ello, ponía el ejemplo del coste de vidas humanas que comportaba la ventaja de los desplazamientos en automóvil, que por entonces se cobraba ya entre treinta mil y cuarenta mil víctimas anuales.

La dedicación de Von Neumann a la energía nuclear, en su fase destructiva, le acarreó dos graves consecuencias, una de carácter psicológico y otra de naturaleza física, que se pusieron de manifiesto al final de su vida. La primera se tradujo en un pesimismo creciente que ya nunca le abandonó. Consideraba que la tecnología alcanzada por el ser humano había superado con creces su capacidad para gestionarla. Estaba plenamente convencido de que el holocausto nuclear podría retrasarse durante un cierto período de tiempo, pero que al final sería inevitable. Su principal amargura se centraba en la imposibilidad de los Gobiernos para conseguir la estabilidad política necesaria para evitar el desenlace fatal. La segunda consecuencia fue que padeció un cáncer de huesos que acabó con su vida. Es difícil, incluso hoy en día, saber con certeza el origen real de un cáncer, pero aun así parece ser que el cáncer que afectó a Von Neumann fue debido a un prolongado contacto con fuentes radiactivas, junto con un exceso de confianza que le llevó a no tomar nunca las medidas de seguridad necesarias.

LA GUERRA FRÍA

Después de que la Unión Soviética hiciera detonar su primera bomba atómica el 22 de agosto de 1949, el conflicto nuclear entre Estados Unidos y la Unión Soviética estaba servido. Eran los inicios de la llamada «Guerra Fría». El mundo se abría a un nuevo escenario nunca antes conocido. Gracias al armamento nuclear, las primeras potencias mundiales estaban en condiciones de bo-

rrar del mapa a cualquiera de sus oponentes con tan solo apretar un botón. O, por lo menos, eso era lo que se creía. Aunque es muy probable que se hubiera sobrestimado el poder destructivo de los arsenales nucleares de la época, lo que sí parecía cierto era que un ataque nuclear relámpago dejaría completamente devastados los grandes núcleos urbanos sobre los que se asentaban los poderes social y económico de las grandes potencia mundiales.

Von Neumann no fue el único científico que mantuvo esta actitud belicista. También el matemático británico Bertrand Rus-

MATEMÁTICAS DE LA GUERRA

En la actualidad, poco o nada significarán para un profano el siguiente conjunto de símbolos:

$$\frac{db(t)}{dt} = -\kappa_r \cdot r(t) \qquad b(0) = B$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\kappa_b \cdot b(t) \qquad r(0) = Rw.$$

Un matemático verá en ellos un sistema de ecuaciones diferenciales en el que aparecen unas condiciones iniciales. Lo que difícilmente alguien podría sospechar es que se trata de uno de los muchos modelos de batalla establecidos por la OTAN, en el que figuran unidades de combate, número de operaciones realizadas en un tiempo t y parámetros similares. Sin duda, el nivel de complejidad en el que han entrado actualmente las estrategias militares hace de las matemáticas una herramienta imprescindible. Por otra parte, no es algo extraño, si se tiene en cuenta que, debido al alto nivel tecnológico en el que opera el armamento moderno, se hace necesaria la intervención de sofisticados dispositivos, como grandes computadores, complejas redes de comunicaciones o constelaciones de satélites de vigilancia. Hoy, ya no se trata de dominar las bases de la geometría o el cálculo diferencial, como se exigía antaño, sino que es necesario ser experto en áreas como la criptografía, el cálculo de probabilidades y la estadística o la teoría de juegos, por mencionar solo algunas. La importancia de las matemáticas en la guerra se puso de manifiesto a medida que estas pasaron a formar parte de las asignaturas claves en la carrera militar, especialmente en la ingeniería. En el transcurso de la Primera Guerra Mundial, con la aparición del sonar y de las nuevas teorías de aerodinámica, gran parte de la tecnología estaba pendiente de su desarrollo

sell, que por entonces gozaba de una gran popularidad, apoyaba la guerra preventiva, aunque con algunos matices que la hacían algo menos tajante que la de Von Neumann, ya que era partidario de dar una alternativa al enemigo: ríndete, sométete al poder de Estados Unidos y te evitarás el holocausto nuclear. Por el contrario, Von Neumann no era partidario de poner sobre aviso a nadie. Su concepto del ataque preventivo consistía en eliminar cuanto antes la capacidad militar de Rusia, sin esperar ningún tipo de provocación, y a ser posible mientras estuvieran durmiendo.

matemático, que llegó a ser tan espectacular que el matemático francés Émile Picard (1856-1941), catedrático de Cálculo Diferencial en la Sorbona, lanzó una voz de alarma temiendo que los estudiantes de matemáticas decidieran dedicarse en un futuro exclusivamente a la matemática aplicada. Sin embargo, con el tiempo se demostró que esa preocupación era infundada.



Maniobras navales de la OTAN. Los avances tecnológicos han cambiado notablemente la configuración externa de un buque de guerra.

Frente a esta actitud de Von Neumann cabe considerar dos aspectos, uno emocional y otro racional. El primero nos retrotrae a los primeros años de su vida, cuando su familia se vio obligada a huir del terror rojo con el que Béla Kun atemorizó a los habitantes de Budapest y que para Von Neumann llevaba el sello inconfundible del «imperialismo comunista». Por otro lado, estaba el matemático racional, frío, que pensaba en términos de estrategias, de toma de decisiones que quedaban reflejadas en números y ecuaciones, en modelos y axiomas. En este contexto estrictamente racional, el escenario de la guerra era el escenario de un juego, el escenario al que de niño había dedicado horas junto con su hermano Mihály frente al tablero del Kriegsspiel.

«Si me propone usted bombardearles mañana, yo le contesto: ¿por qué no hoy? Si dice usted que hoy a las cinco de la tarde, yo le contesto: ¿por qué no a la una?»

— Palabras de Von Neumann en un artículo de la revista *Life*, en las que hace patente su postura ante el conflicto nuclear en los inicios de la Guerra Fría.

Von Neumann era un experto en la teoría de juegos, lo que, como ya vimos en su momento, implica serlo también en la toma de decisiones y en la configuración de estrategias, dos de las capacidades más buscadas por los estamentos militares. Así, no es de extrañar que la lista de instituciones relacionadas directa o indirectamente con dichos estamentos —de las que Von Neumann era consejero— fuera muy larga. En este aspecto, se le ha criticado en muchas ocasiones su querencia hacia los uniformes militares de alto rango y el que un matemático de su talla empleara gran parte de su tiempo en cuestiones aparentemente muy alejadas de las ciencias puras. Es posible que en esta crítica haya mucho de cierto, pero también hay que tener en cuenta que esos eran círculos, como es el caso de la corporación RAND, en los que, precisamente un científico, podía encontrar todos los medios necesarios, sobre todo económicos, para dar rienda suelta a su imaginación y llevar a cabo iniciativas científicas que de otra forma se habrían visto entorpecidas. En esas circunstancias, los

LA CORPORACIÓN RAND

Cuando finalizó la Segunda Guerra Mundial, la mayoría de científicos que habían estado trabajando para el Departamento de Defensa volvieron a sus hogares y ocuparon de nuevo sus puestos en las universidades o fueron contratados por empresas privadas. El ejército de Estados Unidos tuvo una auténtica fuga de cerebros provocada por la paz. Ante esta situación, en 1946 fue fundada la corporación RAND (*Research ANd Development*) por las Fuerzas Aéreas del Ejército de Estados Unidos, que en 1947 se independizó del ejército de tierra, constituyéndose como fuerza independiente. La RAND fue concebida como un *think tank*, depósito de ideas. Era una institución que incorporaba personal para «pensar lo impensable» y en el que había proyectos de investigación que iban desde los misiles intercontinentales hasta la fonética del islandés. Von Neumann fue contratado por la RAND en diciembre de 1948, y se le ofreció un singular contrato por doscientos dólares mensuales que no le obligaba ni siquiera a hacer acto de presencia en la sede. Tan solo le pidieron que el tiempo que tardaba en afeitarse por las mañanas lo empleara para darle vueltas a alguno de los proyectos en los que trabajaban, y que luego les comunicara sus conclusiones.



Edificio de la sede de la corporación RAND frente a las playas de Santa Mónica, en 1958.

estamentos militares, promovidos por un sentido más pragmático, se mostraron también más hábiles y en todo caso la crítica habría que centrarla más en las instituciones académicas que, paradójicamente, siempre han sido más reacias a este tipo de dinámicas.

EL DILEMA DEL PRISIONERO

Durante el tiempo que Von Neumann estuvo trabajando para la RAND, se interesó por las matemáticas que estaban implicadas en un problema de apariencia tan sencilla como el dilema del prisionero que, además de encerrar una gran complejidad, guardaba grandes paralelismos con las cuestiones que planteaba el escenario de la disuasión nuclear, en el que en aquella época estaba trabajando intensamente.

Cuando Merrill Flood y Melvin Dresher, dos investigadores de la RAND, idearon este sencillo juego, al que Albert William Tucker, otro investigador de la misma organización, bautizó como «el dilema del prisionero», no podían sospechar que habían dado nacimiento a uno de los mayores iconos de la teoría de juegos de todos los tiempos.

El dilema del prisionero se plantea en los siguientes términos. Dos componentes de una organización criminal han sido detenidos. La policía tiene fundadas sospechas de que han cometido un delito por el que podrían ser condenados a una pena de seis años de cárcel, pero carece de las pruebas necesarias para que se haga efectiva la condena. Sin una acusación formal solo podrán ser condenados a un año de cárcel por un delito menor. La policía les ofrece entonces un trato en las siguientes condiciones: si uno confiesa acusando al otro, el primero quedará libre de cargos, y el segundo será condenado a una pena de diez años de cárcel. Si cada uno por su parte declara en contra del otro, ambos deberán cumplir una sentencia de cuatro años de cárcel. La policía mantiene incomunicados a ambos presos de manera que ninguno de los dos puede saber la decisión que toma el otro. Si llamamos A y

B a cada uno de los prisioneros, el resumen de la situación queda reflejado en la siguiente matriz de pagos:

	B *no* acusa a A	B *sí* acusa a A
A *no* acusa a B	1,1	10,0
A *sí* acusa a B	0,10	4,4

Al no poder compartir estrategias debido a la incomunicación, la toma de decisiones se convierte en un asunto nada trivial. En un principio, todo apunta a que una postura egoísta en la que solo se tengan en cuenta los intereses de cada uno de los prisioneros sería la más ventajosa, ya que en caso de condena cumpliría un máximo de cuatro años, frente a la posibilidad de cumplir la pena máxima de diez, con la ventaja añadida de que, con un poco de suerte, podría quedar libre de condena si el otro prisionero no le acusa.

Este razonamiento parece bastante sensato, y cabe pensar que el otro prisionero también se lo planteará en los mismos términos, por lo que lo más probable es que ambos acaben cumpliendo una condena de cuatro años. Esta es la que podría considerarse la estrategia dominante. Sin embargo, es obvio que no es la mejor solución, ya que si ambos se hubieran negado a declarar uno en contra del otro, la condena hubiera sido de solo un año. Así, parece que la mejor estrategia es la de cooperar, pero esto significa que a priori debemos confiar en la postura del contrincante, algo de lo que no tenemos garantías.

Existe toda una rama de las matemáticas dedicada a estudiar situaciones como la expuesta, tratándolas como «juegos de estrategia». El juego empieza con una tabla numérica, a veces extremadamente complicada, y las estrategias son las posibles «jugadas» óptimas de los jugadores. Si se utilizan las armas del frío intelecto, de las probabilidades, de la llamada «esperanza matemática» y del álgebra, se llega a conclusiones racionales en las que, por lo general, es mejor que cada jugador no actúe en términos egoístas. Lo que un jugador cree que es bueno para él, puede que no lo sea tanto, si tienen en cuenta las posibles acciones de los demás. Así,

la decisión ideal, o estrategia óptima, pasa en muchas ocasiones, por soluciones cooperativas. De este modo, todos obtienen el mayor beneficio posible compatible con el menor prejuicio posible. En el dilema del prisionero, la experiencia muestra que los jugadores se inclinan por la delación, en lugar de hacerlo por la confianza; y, matemáticamente, se equivocan.

Si se plantea el dilema del prisionero en un ambiente informal, por ejemplo en una comida entre amigos que tengan ganas de pensar frente a un café y una copa de licor, tendremos garantizadas dos cosas, la primera es que la sobremesa será larga, y la segunda, que cuando finalice no se habrá llegado a ninguna conclusión. Y es que, en principio, el dilema del prisionero carece de una solución convincente, ya que es un planteamiento que tiene más de paradoja que de acertijo lógico con solución. Las dos posibles soluciones que se plantean como las correctas, que ambos cooperen o que decidan inculpar al otro, son muy difíciles de justificar racionalmente.

Sabemos que en este tipo de situaciones en las que se debe tomar una decisión pueden intervenir diversos factores como los morales o los emocionales. También podemos dejarnos llevar por la intuición o dejarnos fascinar por algún arte adivinatoria o simplemente tomar unos dados y dejarlo todo en manos del azar. Pero siempre quedará la misma pregunta en el aire: ¿existe algún método para que la toma de la decisión se lleve a cabo de una forma racional? Plantear el problema en estos términos es lo que posibilita que adquiera una naturaleza matemática. Esta manera de pensar, siempre presente en el ánimo de Von Neumann, fue lo que le llevó a interesarse por el dilema del prisionero.

Es interesante y, hasta cierto punto imprescindible, insistir en que en el planteamiento del dilema no se hagan intervenir factores de índole moral —«no está bien traicionar a un compañero» o «esta es una decisión que me crea problemas de conciencia»—, ya que solo aportan confusión para la solución del problema. Algo similar sucede con el concepto de estrategias colaborativas. No se trata de que la cooperación sea o no preferible por cuestiones éticas, puesto que es algo que se saldría del ámbito puramente matemático, sino de si es una estrategia óptima para obtener el

JUEGOS COOPERATIVOS



El *paintball* es un juego cooperativo en el que se simulan escenas de guerra.

Los juegos cooperativos son aquellos en los que los jugadores pretenden alcanzar un cierto objetivo común, como ganar unas votaciones, mejorar la gestión de una empresa o incrementar los beneficios de la misma. En cualquier caso, para lograr el objetivo existe una colaboración entre los jugadores. Es la situación contraria a los denominados juegos no cooperativos, también llamados competitivos, en los que la estrategia individual tiene un papel fundamental. Un claro ejemplo de ambos conceptos se da en los juegos de guerra. Durante la Guerra Fría se produjo un equilibrio inestable entre las dos grandes potencias mundiales, la Unión Soviética y Estados Unidos. Se trataba de un juego competitivo regulado por estrategias unilaterales. Estaba claro que esta situación de juego no cooperativo podría traer consecuencias fatales para ambos contendientes, lo cual llevó a establecer acuerdos de no proliferación de armas nucleares.

Cooperar para ganar

Los juegos de rol también pueden constituir un ejemplo de juego cooperativo; se parecen a una obra de teatro que discurre alrededor de una mesa. Los participantes interpretan papeles de personajes ficticios siguiendo las indicaciones de un narrador que trama el desarrollo del juego, pero los jugadores son libres de decidir lo que hacen dentro de la obra. Asimismo, el popular dominó jugado individualmente es un juego competitivo; en cambio, si se juega por parejas es cooperativo.

mayor beneficio con el mínimo riesgo en un escenario concreto de juego en el que se dé un conflicto de intereses.

Para evitar este tipo de confusiones es bueno plantear el dilema como un mero juego de casino en el que se puede ganar o

perder una cierta cantidad de dinero convenida, y no como un relato con tintes dramáticos que puede afectar seriamente a la vida de las personas, como lo es poner en juego una condena de prisión. Esta es la forma que William Poundstone propone en su libro *El dilema del prisionero* (1992).

Se trata de un juego para dos personas, que se juega una sola vez. Si se quiere repetir, es obligatorio cambiar de pareja. La única obligación que se les exige a los jugadores es la de querer ganar, como en cualquier otro juego. Esto parece una trivialidad, pero no lo es, ya que venimos de las consideraciones morales del dilema del prisionero. Si un jugador de póquer se plantea engañar al contrario mediante un farol, no tiene sentido que digamos que este jugador está engañando al contrario con triquiñuelas propias de alguien que carece de principios morales. Algo así sería completamente estúpido, ya que lo único exigible a los jugadores es que se atengan a las reglas del juego sin hacer trampas —esconder un as en la manga sí puede ser moralmente sancionable— y sobre todo, insistiendo de nuevo, se le pide que si juega, juegue para ganar. Este tipo de planteamientos adquiere una gran relevancia cuando la teoría de juegos se lleva más allá de un mero pasatiempo y se plantea en un escenario bélico.

Volviendo al dilema en la versión casino, los jugadores juegan en una mesa que dispone de un dispositivo electrónico que está debajo de la misma, oculto al contrincante y que sirve para tomar la decisión de cooperar o no. El crupier es quien decide en qué momento los jugadores pueden pulsar los botones correspondientes. Una vez establecido el valor de las apuestas, la matriz de pagos podría ser la siguiente:

	B coopera	B *no* coopera
A coopera	(2, 2)	(0, 3)
A *no* coopera	(3, 0)	(1, 1)

De manera que en el caso en que ambos cooperen, cada uno gana dos euros, si ninguno de los dos coopera, cada uno gana un euro y, por último, en el caso en que uno coopere y el otro no, el

primero no gana nada y el segundo gana tres euros. Esta última situación es lo que vulgarmente se entiende por «hacer el primo», que es lo que la mayoría de los jugadores tratan de evitar a toda costa.

Esta matriz de pagos puede tener diversas variantes, como la de incluir pérdidas introduciendo números negativos, que nos acercaría más al dilema del prisionero en su versión clásica, pero como modelo sirve para estudiar el dilema si cumple los siguientes requisitos: uno de los resultados ha de ser el de «premio», que es cuando ambos contendientes cooperan —dos euros—; otro de castigo, cuando ambos no cooperan; y un tercero que se da cuando solo uno de los dos no coopera, que tiene que contemplar siempre para uno de ellos una contribución mayor que la de la cooperación.

TEORÍA DE AUTÓMATAS

Sería erróneo pensar que la actividad científica de Von Neumann después de la guerra estuvo centrada únicamente en temas militares. Su biografía muestra a las claras que su mente nunca estuvo ocupada en una sola cosa.

Uno de los temas en los que Von Neumann estuvo trabajando en esta segunda etapa de su vida fue el del autorreplicador universal, algo que tocaba muy de cerca su faceta reproductora, uno de los secretos ocultos de la vida. Quería demostrar que dicha faceta no obedecía a extrañas leyes ocultas, sino a reglas matemáticas, más o menos simples, que conforman el verdadero lenguaje de la naturaleza.

El autorreplicador universal de Von Neumann es una máquina que consiste en un módulo de fabricación que, con instrucciones precisas y un entorno de piezas adecuado, es capaz de construir lo que sea, y que además posee las instrucciones necesarias para construirse a sí misma. Von Neumann se vio obligado a introducir una condición para evitar lo que se llama una «regresión infinita»: en alguna parte de la máquina deben estar las instrucciones que

describen a la propia máquina en su totalidad. Por lo tanto, dentro de dichas instrucciones debe haber otras instrucciones que las describen, y así sucesivamente. Sea como fuere, una máquina no puede contener una regresión infinita como esa. Para solucionarlo, añadió un tercer componente, que era un copiador de instrucciones, de forma que la máquina completa estaba formada por un constructor, la lista de instrucciones y un copiador. De esta manera, en la primera fase, la lista de instrucciones era interpretada y en la segunda fase simplemente copiada.

Para construir una máquina autorreplicadora en un ordenador es necesario diseñar un autómata que emule a una máquina de Turing. Teóricamente, es posible diseñar las puertas lógicas necesarias para ello: NOT-AND-OR (no-y-o). Por ejemplo, se puede diseñar una puerta NOT con lo que se denomina un «cañón de autómatas deslizadores», un esquema demasiado complejo para describirlo en este contexto. Von Neumann llegó a demostrar que, en un entorno de estas características, un autómata de 200 000 estados sería capaz de autorreproducirse, algo que, de momento, va más allá de nuestras posibilidades de computación.

Si algún día es posible la realización práctica de un autorreplicador de Von Neumann, quiere decir que en alguna parte habrá un robot rodeado de piezas que se pondrá a trabajar, y al cabo de un tiempo aparecerá una réplica exacta del mismo. Entonces, se fabricarían dos, y luego cuatro, y así en progresión geométrica. Lo que Von Neumann no previó —ni nadie puede hacerlo hoy— es qué tal se llevarían estos robots con los humanos, ya que hay que tener en cuenta que en muy poco tiempo acabarían por representar una mayoría abrumadora e imparable.

En 1948, Von Neumann se puso manos a la obra y diseñó un constructor universal, una máquina que, siguiendo unas instrucciones dadas, sería capaz de montar otra máquina con un conjunto de piezas que se encontraran en su entorno, algo que en cierta forma podemos ver en cualquier fábrica moderna que esté robotizada. Pero Von Neumann quería llegar un poco más allá y dotar a la máquina y a su entorno de las instrucciones y las piezas necesarias para construir una réplica exacta de sí misma; es decir, quería

ROBÓTICA

El término robot, que procede de la palabra checa *robota* («trabajo obligatorio»), fue empleado por primera vez en una obra de teatro, *Robots Universales de Rossum*, del dramaturgo checo Karel Capek y estrenada en enero de 1921 en Praga. El argumento se centraba en una fábrica capaz de construir seres mecánicos al servicio del hombre. Al final de la obra, los robots acaban destruyendo a la especie humana. La robótica es una ciencia aplicada que gracias a los conocimientos aportados por la cibernética y la ingeniería técnica, es capaz de construir una máquina controlada por un programa que sea capaz de manipular objetos y tener una cierta interacción con su entorno. Su objetivo es el de sustituir al ser humano en una serie de trabajos que encierren rutina, fatigabilidad, inaccesibilidad o peligro. La fisiología de un robot se configura a base de elementos mecánicos. Su anatomía, formada por metales o plásticos, se mueve gracias a servomotores, su sistema nervioso está formado por cables eléctricos y por sus venas fluye aceite de máquina. Su cerebro no se asemeja a un ordenador... Es un ordenador. Sin embargo, en muchos casos existe la idea equivocada de que un robot debe parecerse a un ser humano. En sentido estricto, un lavavajillas es un robot. Las tres características fundamentales que se le exigen a un robot son:



Robot tocando el piano, expuesto en el Museo de Ciencia y Tecnología de Shanghai, China.

1. Que sea programable, de la misma manera que lo es un ordenador.
2. Que sea una máquina capaz de llevar a cabo acciones concretas en su entorno.
3. Que sea flexible.

La tercera característica es en realidad una consecuencia de las dos anteriores, ya que por un lado supone la capacidad de operar con un abanico amplio de programas y, por el otro, la de interactuar con el medio de diversas formas.

CIBERNÉTICA

La cibernética es la ciencia que estudia las diferentes formas de comunicación que pueden establecerse entre dos máquinas y, por supuesto, las leyes que gobiernan la comunicación entre el hombre y la máquina. El matemático húngaro Norbert Wiener (1894-1964) está considerado como el padre de la cibernética. En 1948 escribió un pequeño libro titulado *Cibernética, o control en los animales y las máquinas*, que acabó por convertirse en un *best seller*, lo que permitió salir al autor de la precaria situación económica en la que se encontraba.



Norbert Wiener.

construir un replicador. La naturaleza en la que vivimos abunda en replicadores, el propio ADN es uno de ellos. Curiosamente, Von Neumann, una de las mentes teóricas más privilegiadas del siglo XX, pretendía traspasar el terreno teórico y construir su máquina autorreplicante, a la que llamó Kinematon.

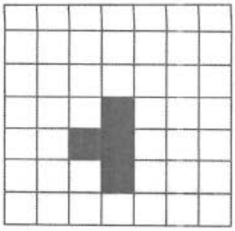
Cuando Von Neumann estaba peleando con las insalvables dificultades técnicas que suponían la realización práctica del Kinematon, un amigo suyo, el matemático polaco-estadounidense Stanislaw Ulam, le dio un buen consejo; le sugirió que si lo que le interesaba era profundizar en las leyes que regían el proceso, dejara los trabajos manuales y se dedicara a establecer un modelo virtual. Von Neumann decidió cambiar su estrategia y planteó un sistema formado por una matriz plana infinita en la que pudiera representar cada una de las células, lo que viene a ser lo mismo que un papel cuadriculado en el que una célula pudiera estar representada en una de las cuadrículas. En cada una de las células se podía identificar un estado, y el número posible de estados

debía ser finito. Concretamente, en el modelo original de Von Neumann, para cada célula había 29 estados definidos. La idea era que, según unas reglas previamente definidas, cada estado dependiera de alguna forma del estado de las células vecinas, y que dependieran directamente del estado anterior. De esta manera, el sistema guardaba ciertas analogías con los sistemas vivos, al menos en el sentido en que las células podían moverse para entrar en contacto con otras células y, lo que era más importante, generar otras células en estados análogos o idénticos al suyo. En definitiva, lo que Von Neumann se proponía era estudiar una estructura muy compleja mediante un modelo muy simple, los autómatas celulares.

AUTÓMATAS CELULARES

Un autómata celular viene a ser la abstracción matemática de los procesos celulares que observamos en los seres vivos y que se puede definir como un sistema dinámico que consta de dos elementos: un espacio celular y unas reglas de comportamiento. Por definición, un espacio celular es un dominio Von Neumann-dimensional cuyos elementos, denominados «células», poseen un estado que viene determinado o bien por un número finito de valores $\{v_1,...,v_n\}$, o bien por un valor continuo cualquiera. Esta definición puede resultar un tanto críptica, pero tiene como finalidad mostrar que aunque el resultado tiene la forma de un juego muy simple, no está exento de todo el formalismo que la rigurosidad matemática exige. Pero, para hacerlo más entendible, reduzcamos esta definición a su expresión más sencilla y que, además, es la que se utiliza en las exposiciones teóricas. De entrada, el dominio Von Neumann-dimensional va ser 2-dimensional, de manera que pueda representarse en un papel cuadriculado en el que cada una de las cuadrículas es una célula. De los dos conjuntos de valores, vamos a rechazar el del conjunto continuo, ya que todo el proceso se va a llevar a cabo en las tripas de un ordenador, y estos se mueven siempre con valores discretos. En cuanto al conjunto

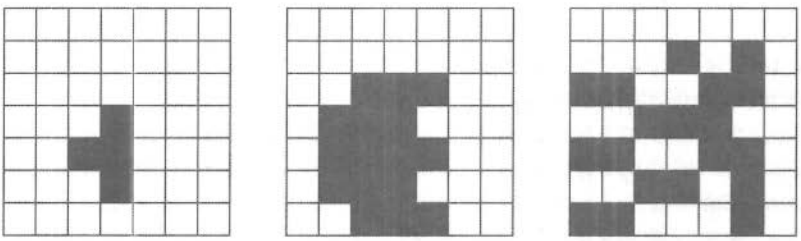
FIG. 1



$\{v_1,...,v_n\}$ posible de dichos valores discretos, nos vamos a quedar solamente con dos {1, 0}. El primero va a significar que la célula está viva, y el segundo que la célula está muerta. También podríamos haber elegido dos colores. En definitiva, tomamos el papel cuadriculado y delimitamos nuestra zona de trabajo, por ejemplo a un cuadrado de siete casillas por lado. A continuación, tomamos un rotulador negro y rellenamos unas cuantas casillas (figura 1).

Ya tenemos nuestro espacio celular en el que hay unas cuantas células vivas, las casillas de color negro, y unas cuantas células muertas, las casillas de color blanco. Ahora solo nos queda establecer las reglas de desarrollo, es decir, la descripción precisa de cómo estas células van a medrar en su entorno. Si la figura anterior la consideramos la etapa 1, debemos tener algún criterio para pasar a la etapa 2 y, evidentemente, debe ser el mismo criterio que nos sirva para pasar de la etapa 2456 a la 2457. Expresado en términos matemáticos, necesitamos un algoritmo que, conociendo el estado de la «etapa N», nos permita configurar el de la «etapa $N+1$». Como en nuestra cuadrícula no aparecen, de momento, elementos extraños, como marcianitos comecocos o cosas parecidas, sobre cada una de nuestras células solo pueden influir las otras células del entorno, lo que nos lleva a precisar el concepto de entorno. Uno de los entornos más sencillos es el de las reglas Norte, Sur, Este,

FIG. 2



Oeste, que significa que sobre una célula solo pueden influir las células que estén encima, debajo o a alguno de los dos lados. Este es el que se llama «entorno de Von Neumann». Si a estas les añadimos también las celdas diagonales, tendremos lo que se llama «entorno de Moore». Se entiende que la posibilidad de definir entornos es casi ilimitada. Podríamos empezar por decir que solo influyen las celdas que se encuentran, por ejemplo, a una distancia r determinada. Existen entornos muy complejos que se definen mediante funciones matriciales, de los que no es necesario hablar aquí.

Partamos del espacio celular anterior y definamos las siguientes reglas que van a actuar en un entorno de Moore:

1. Las células con número par de vecinas vivas mueren.

2. Las celdas con número impar de vecinas vivas generan una célula viva.

De esta manera, tendremos las tres etapas que se muestran en la figura 2.

También se puede empezar con menos casillas y definir otras reglas de juego. Sin duda, se trata de una actividad ciertamente relajante llevar adelante unas cuantas etapas y contemplar el resultado —existen sencillos programas de ordenador que pueden llevarnos rápidamente a la etapa 1000—. Nos podemos encontrar con figuras y situaciones sorprendentes. Se pueden crear configuraciones estables, especies en extinción, naturalezas muertas, depredadores, o estructuras que se van moviendo por la cuadrícula sin perder su forma.

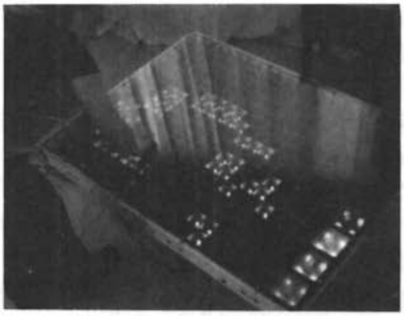
Esta es una variante del juego de la vida, diseñado por el matemático británico John Horton Conway en 1970. Además de ser un juego divertido y tener importantes implicaciones matemáticas, puede ser una herramienta valiosa para investigar y comprender algunos procesos complejos de la naturaleza, ya que en sí mismo es un potente modelo que se puede aplicar, por ejemplo, al estudio de cómo una marea negra puede afectar a la fauna marina.

EL JUEGO DE LA VIDA

Dos especialistas en autómatas celulares podrían mantener una conversación del siguiente tipo:

— Llevo varias semanas trabajando en Vida 4555.

— Interesante. Yo me estoy dedicando a Vida 5766. Le estoy encontrando una aplicación práctica a la forma en cómo se propagan los incendios en los bosques.



Una mesa interactiva en la que se recrea el juego de la vida, expuesta en el Museo de Arte de San José, California.

Para que esta conversación sea inteligible, es necesario conocer el significado de los cuatro dígitos que se mencionan: el primero de ellos hace referencia al número mínimo de células que han de rodear a una célula viva para que no se muera. El segundo es lo mismo, pero hace referencia al número máximo. El tercero es el número mínimo de células vivas que ha de haber para que exista la posibilidad de recobrar vida. El cuarto, y último, representa el número máximo de vecinas que se pueden tener para recobrar vida. Lo que actualmente se entiende por «juego de la vida» es una teoría matemática que asombra por su sencillez. Es objeto de intensas investigaciones y sus aplicaciones posibles pueden ser de índole teórica o eminentemente práctica, como la reproducción de células cancerígenas, la proliferación de árboles infectados en un bosque, la propagación de incendios o el crecimiento de cristales.

DEL SUEÑO DE LEIBNIZ AL DE NEUMANN

El pensamiento humano se desarrolla en un ámbito misterioso y obedece a leyes que todavía no se han revelado en su totalidad, ni mucho menos. Sin embargo, a lo largo de la historia, algunos grandes pensadores han abrigado la creencia de que si fuera posible asignar números a las ideas, de forma que a cada una de ellas le correspondiese un número, bastaría con realizar cálculos con estos números para saber las proposiciones que son ciertas y

cuáles son falsas. En síntesis, ese era el sueño de Gottfried Leibniz (1646-1716). El poeta alemán Friedrich Hölderlin (1770-1843) dijo en una ocasión: «El hombre, cuando sueña, es un príncipe, y cuando reflexiona, un mendigo». Y qué duda cabe de que Leibniz tenía mucho de príncipe...

Sin embargo, para figuras como Pascal, Leibniz o Descartes, cuyas mentes matemáticas abrigaban, si no un cierto pragmatismo, sí una forma de concreción, reflexionar significaba llevar sus ideas a la práctica, momento en el que el sueño podía tornarse en pesadilla. Así, no es de extrañar que sus primeras conclusiones se concretaran en máquinas de calcular, ya que el cálculo numérico es una de las primeras operaciones abstractas que realiza la mente humana. Además, el tiempo ha demostrado que las máquinas «pensantes» más avanzadas que, de momento, somos capaces de fabricar, basan su funcionamiento en un cómputo de números que sigue unas reglas algebraicas bien definidas, las del álgebra computacional. Esta disciplina es una compleja y, hasta cierto punto muy especializada, rama de las matemáticas, que surgió con el advenimiento de la informática, pero que tuvo sus orígenes en la mente especuladora de filósofos y matemáticos.

> «La verdad es demasiado complicada como para permitir nada más allá de meras aproximaciones.»
>
> — John von Neumann.

La máquina calculadora diseñada por Leibniz era, al menos sobre el papel, más compleja que la de Pascal, ya que, además de sumar y restar, también podía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas. Entre el período en el que empezó a concebirla y el momento en que la pudo ver realizada pasaron casi veintitrés años. El nombre que le puso a la máquina ya era representativo: *Getrocknetsrechenmaschine* (calculadora secuencial o por pasos). De hecho, esta máquina calculadora multiplicaba por reiteración de sumas, pero los mecanismos presentaban una dificultad que la técnica de la época no podía resolver, por lo que nunca llegó a funcionar bien. A pesar de su fracaso, Leibniz estuvo du-

rante todo ese tiempo dándole vueltas a una idea realmente revolucionaria. Si los números podían ser representados en base dos, no solo podría simplificar los mecanismos, sino que tenía la posibilidad de aplicar la lógica binaria al proceso de cálculo.

Para Leibniz, el mundo podía ser interpretado según dos niveles distintos. Uno de ellos era el físico, inmerso en el espacio y el tiempo, en el que rigen las leyes de la causalidad —todo efecto tiene una causa— y en el que los fenómenos se pueden explicar mediante leyes mecánicas. En el otro nivel, el metafísico, no existe ni el espacio ni el tiempo, ni tampoco causas y efectos; solo números. Leibniz explicó con claridad la naturaleza de este segundo nivel cuando afirmó:

> Con precisión metafísica, no tenemos más razón cuando decimos que el buque empuja al agua para producir un gran número de remolinos, que cuando afirmamos que el agua está siendo solicitada para producir estos remolinos y ellos causan que el buque se mueva en armonía con ellos.

A partir de estos supuestos, Leibniz buscó un lenguaje universal que, a modo de diccionario, incluyera todos los términos que pudieran ser abarcados en el mundo metafísico y la manera en que dichos términos podrían relacionarse entre sí, para dar lugar a nuevas verdades, de manera que se pudiera controlar dicho mecanismo de relación. Esta empresa es la que le llevó a ser considerado como el padre de la lógica simbólica. En cuanto a la asignación numérica, Leibniz propuso asignar números primos a los términos simples y el producto de dichos números a términos cualesquiera. Para llevar esta idea a la práctica, formuló un álgebra con solo dos conectivas, la negación y la conjunción, creando así las bases para una lógica binaria.

¿Se ha cumplido el sueño de Leibniz? En algunos aspectos sí, y en otros es probable que no se cumpla nunca. La matemática británica Ada Lovelace (1815-1852), la primera programadora de la historia, probablemente conocía las ambiciosas metas de Leibniz, ya que en una ocasión, haciendo referencia a las computadoras, escribió:

> La máquina analítica no tiene la pretensión de crear nada. Puede realizar cualquier cosa siempre que conozcamos cómo llevarla a cabo. Puede seguir un análisis, pero es incapaz de descubrir relaciones analíticas o verdades. Su potencialidad es la de ayudarnos a hacer posible aquello sobre lo que tenemos un conocimiento previo.

Leibniz soñaba con la posibilidad de construir una máquina que emulara una parcela de la mente humana. Von Neumann soñaba con descubrir el lenguaje de programación con el que funciona esa parcela.

REDES NEURONALES

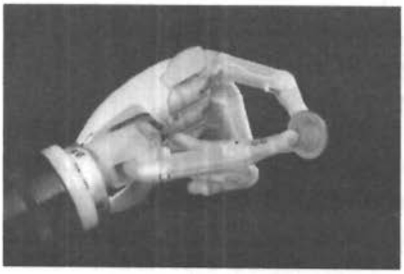
En 1943, dos estadounidenses, el neurólogo y cibernético Warren McCulloch (1898-1969) y el lógico Walter Pitts (1923-1969), idearon un modelo computacional que simulaba el funcionamiento del sistema nervioso, creando para ello unas unidades llamadas «nodos» que se interconectaban unas con otras de forma similar a como los axones conectan entre sí las dendritas en los sistemas biológicos. Habían nacido las redes neuronales artificiales (ANN, de Artificial Neural Networks). Von Neumann trabajó en redes neuronales ampliando y desarrollando modelos más complejos que los propuestos por McCulloch y Pitts.

Existen básicamente dos tipos de ANN, los *biológicos*, que tratan de reproducir algunas funciones como la audición o la visión humanas, y los modelos *dirigidos a una aplicación* concreta, que apenas guardan similitud con los sistemas biológicos. John von Neumann hizo una estimación sobre la cantidad de información que el cerebro registraba como memoria a lo largo de una vida media. El número final era aproximadamente de $2{,}8 \cdot 10^{20}$ (280 000 000 000 000 000 000 bits), una cantidad difícil de ubicar en nuestro exiguo cerebro por mucho empeño que se ponga.

Von Neumann consideraba a las células nerviosas como los dispositivos electrónicos capaces de generar bits: 1 cuando ge-

BIÓNICA

La cibernética dio lugar al desarrollo de la biónica, que es la ciencia que se dedica a investigar la simulación de actividades humanas y animales por medio de máquinas. Los avances en biología y electrónica se suman en esta nueva ciencia que permite estudiar los principios mediante los cuales se organizan los seres vivos. En la actualidad, la biónica tiene importantes aplicaciones en la construcción de modelos referidos a las moléculas proteicas y a los ácidos nucleicos. A pesar de que se han hecho avances tecnológicos importantes en biónica, apenas se ha cumplido alguna de las expectativas que se plantearon en la década de 1950. Hasta cierto punto, en comparación con la informática, ha sido un fracaso. Este hecho no debería sorprendernos si pensamos que solo la estructura que supone el fondo de retina de un ojo humano, capaz de alcanzar los diez millones de detecciones por segundo, requiere un ordenador que procese más de mil millones de instrucciones por segundo. Todo el *hardware* biológico que procesa la imagen en la retina pesa unos 20 miligramos y la totalidad del cerebro unos 1500, lo que supone construir un ordenador del tamaño de un PC capaz de procesar más de cien billones de instrucciones por segundo. Sin embargo, la capacidad de los actuales PC apenas sería capaz de emular el cerebro de uno de los pequeños peces que habitan en nuestras peceras.



Una mano biónica.

neran un impulso eléctrico y 0 cuando están en reposo. Todo el sistema conlleva una enorme complejidad en la que intervienen procesos electroquímicos y mecánicos, pero su funcionamiento básico debe contener una parte lógica y otra aritmética, ambas con igual relevancia. De ahí concluyó que el cerebro puede, en este sentido, ser tratado de forma análoga a como se abordan los problemas que plantea una máquina calculadora corriente. En ese punto volvía una vez más a considerar la estructura lógica como herramienta para la creación de un modelo. Podría aplicar este modelo incluso al lenguaje, tal y como lo entendemos co-

loquialmente. En ese marco, hizo una reflexión interesante que puso de manifiesto su concepción ontológica de las matemáticas. Afirmó, textualmente, que idiomas como el griego o el sánscrito son realidades históricas y no necesidades lógicas. Lo primero es un proceso de aprendizaje al que se enfrenta el sistema nervioso central, mientras que lo segundo es estructural y obedece a una naturaleza propia que debe tener una estrecha relación con las matemáticas, lo que es tanto como afirmar que las matemáticas no son un «invento» del ser humano, sino que forman parte de su propia naturaleza.

En diciembre de 1949, Von Neumann dio una conferencia en la Universidad de Illinois titulada «*Theory and Organization of Complicated Automata*» («Teoría y organización de autómatas complicados»). El esquema era el siguiente: si pensamos en el cerebro como una máquina calculadora, cuando la utilizamos para comunicarnos con otra persona, lo hacemos mediante un lenguaje secundario que es resultado de un lenguaje primario que tiene lugar previamente en el sistema nervioso. Ambos lenguajes pueden ser en principio muy diferentes. Pero cuando pensamos en matemáticas, la precisión, la eficacia y la profundidad con que expresamos conceptos aritméticos y lógicos nos hacen deducir que el lenguaje primario de nuestro sistema nervioso central tiene que estar muy cercano a eso que llamamos «matemáticas». O sea, en definitiva, nuestra mente es una mente matemática, por lo menos en lo primigenio.

Von Neumann reflejó todos estos resultados en un manuscrito que no llegó a finalizar y que fue publicado incompleto y póstumamente con el título *The Computer and the Brain* («El ordenador y el cerebro»).

LOS ÚLTIMOS AÑOS

A partir de la década de 1950, Von Neumann actuaba como consejero de una gran cantidad de corporaciones, agencias gubernamentales y privadas. Era miembro del comité asesor del Laboratorio

de Investigación Balística, en Maryland, de la Oficina de Artillería de la Marina de Estados Unidos, en Washington, del Laboratorio Científico de Los Álamos, director del proyecto de Computadora Electrónica del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, del Proyecto de Armas Especiales de las Fuerzas Armadas y también del grupo de evaluación de sistemas de armas de la misma organización. A partir de 1952 pasó a formar parte de la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos y en 1955 juró su cargo como miembro de la Comisión de Energía Atómica, por designación del entonces presidente de Estados Unidos, Dwight David Eisenhower. Su capacidad para la gestión de escenarios complejos y la toma de decisiones le había llevado a ocupar su tiempo en actividades que estaban muy alejadas de las ciencias puras.

Von Neumann gozaba de una buena posición económica; solo del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton recibía 12 500 dólares al año. Vivía con su madre, con su mujer, Klara, y su hija Marina en una gran casa situada en el número 26 de Westcoot Road, que a menudo era el centro de reuniones sociales a las que acudían personas famosas. Él mismo era ya una personalidad mediática reclamada por los medios de comunicación, la radio y la televisión para que diera su opinión sobre diferentes temas, algunos de los cuales empezaban ya a invadir el ámbito de su vida privada.

En el verano de 1955, Von Neumann empezó a quejarse de fuertes dolores en el hombro izquierdo. En un principio, lo relacionó con una caída que había tenido a causa de un resbalón. El dolor, que en circunstancias normales debería haber remitido al cabo de pocos días, persistió hasta el punto de que tuvo que someterse a una operación quirúrgica. Fue entonces cuando se le diagnosticó un cáncer óseo. Luego se comprobó que se trataba de un cáncer secundario que tenía su origen en un cáncer en la próstata. Siempre se ha dicho que Von Neumann contrajo el cáncer por no haber tomado las precauciones necesarias que exigen los protocolos cuando se trabaja en ambientes radiactivos. Incluso se alude a una cierta prepotencia de su carácter cuando se afirma que la seguridad que tenía en sí mismo le hacía creer que nada podía afectarle, ni siquiera la radiación a la que él, como la mayoría

de los componentes del Proyecto Manhattan, se había visto sometido; de hecho, no fue el único que se vio afectado por el cáncer.

No es necesario relatar la enajenación mental y la angustia a que se ve sometida una persona a la que se le diagnostica un cáncer terminal. Los médicos le dieron un plazo de vida de año y medio. En 1955, el cáncer le afectó la médula espinal y sus movimientos quedaron destinados a una silla de ruedas. Pusieron a su disposición los medios necesarios para que pudiera proseguir sus tareas como consejero, pero sobre todo para poder concluir algunos proyectos científicos, entre los que se encontraba la realización de un misil balístico, y también otro de carácter más científico en el que llevaba tiempo trabajando y que era la posibilidad de crear un cerebro artificial que llegara a emular, en pequeñas medidas, el comportamiento del cerebro humano.

«¿Usted me despierta temprano para decirme que tengo razón? ¡Despiérteme para decirme que me equivoqué!»

— John von Neumann.

La última aparición en público de Von Neumann tuvo lugar en febrero de 1956 en la Casa Blanca, cuando el presidente Eisenhower le impuso la *Medal of Freedom* (medalla de la Libertad). A partir de ese momento, su estado de salud le obligó a quedar confinado en su casa. Para finales de marzo de ese mismo año estaban programadas las prestigiosas conferencias Sillman de la Universidad Yale, a las que Von Neumann estaba invitado para hablar sobre sus trabajos acerca de las relaciones entre ordenador y cerebro. Ante la imposibilidad de su asistencia, la universidad se ofreció a que alguien leyera el manuscrito en su nombre. Sin embargo, Von Neumann no pudo llegar a finalizar esta última tarea y ese manuscrito no llegó a leerse en público nunca. En abril de 1956, ingresó en el hospital Walter Reed, del que ya no saldría. A pesar de su mal estado de salud, se hizo instalar un despacho provisional que le permitiera seguir trabajando.

Los fuertes dolores provocados por la enfermedad obligaron a suministrarle fuertes dosis de morfina, lo que afectó a su

rendimiento mental. Este progresivo deterioro intelectual fue la secuela que más insoportable le resultó a Von Neumann. Ante la proximidad de la muerte, el físico húngaro tomó una decisión inesperada, se convirtió al catolicismo. Durante toda su vida fue un agnóstico irreductible. Quizá buscó un consuelo que ya no sabía dónde encontrar, aunque fue inútil ya que, según testimonio de las personas que estuvieron próximas a él durante el último año, las noches y los días se convirtieron en un infierno delirante.

John von Neumann murió en Washington el 8 de febrero de 1957, a la edad de cincuenta y cuatro años.

EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE VON NEUMANN

Se puede hacer una clasificación muy general de las matemáticas en matemáticas *puras* y matemáticas *aplicadas*. Actualmente, la mayoría de universidades las contemplan como licenciaturas diferentes, pero no siempre ha sido así. A principios del siglo XX, el desarrollo tecnológico exigió a los ingenieros una creciente utilización de las matemáticas y en muchos casos, si no la creación, sí la adecuación de diferentes herramientas matemáticas a su trabajo. Por otro lado, los nuevos descubrimientos que revolucionaron la física, especialmente la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, dieron nacimiento a la física matemática, una disciplina con entidad propia y que se encuentra en la frontera entre las matemáticas puras y las aplicadas. Aunque no siempre se reconozca de forma tácita, en términos generales existe un cierto distanciamiento entre las ciencias puras y las aplicadas. En este contexto, el término «puro» podría ser aceptado en su acepción literal. Los puristas consideran que la investigación teórica debe ser independiente de las necesidades materiales del mundo que les rodea. En este punto, el caso de Von Neumann es realmente singular, ya que destacó como genio tanto en la teoría pura como en la creación de herramientas matemáticas e incluso de dispositivos mecánicos para resolver problemas muy concretos, demostrando que era capaz de moverse con maestría en ambos campos. Abordó



FOTO SUPERIOR:
El 16 de febrero de 1956, el presidente Dwight David Eisenhower impuso la medalla de la Libertad a Von Neumann, miembro de la Comisión de Energía nuclear, por su valiosa contribución al adelanto en el terreno de la seguridad de Estados Unidos.

FOTO INFERIOR:
Von Neumann impartiendo una conferencia sobre su trabajo acerca de las máquinas calculadoras en la sede de la Sociedad Filosófica Americana, en 1957.



temas de matemática pura, como la axiomatización de la teoría de conjuntos o de la mecánica cuántica, y también obtuvo éxitos en cuestiones tan «terrenales» como la teoría económica, la balística o el diseño del mecanismo de implosión de la bomba atómica. Pocos científicos han mostrado una dualidad tan marcada, a la que Neumann dedica una interesante reflexión en su artículo «*The Mathematician*» («El matemático») publicado en sus obras completas, que sintetiza esta doble naturaleza del trabajo matemático frente a la que acaba adoptando una postura muy clara.

«Yo estaba conduciendo por la carretera. Los árboles me pasaban por la derecha de manera ordenada a 60 millas por hora. De repente uno de ellos se cruzó en mi camino.»

— John von Neumann.

Parece que, dado su alto nivel de abstracción, las matemáticas puras pueden estar muy alejadas de lo que coloquialmente entendemos por realidad. Von Neumann defiende que, aun así, las matemáticas tienen siempre un origen empírico, es decir, basado en algún tipo de experiencia directa con la realidad. Para ello, toma dos ejemplos. El primero lo proporciona la geometría, que es la disciplina con la que las matemáticas nacen como tales. La propia etimología del término es una buena prueba de ello, ya que hace referencia directa a la medida de los objetos. La axiomatización por parte de Euclides es lo que la aleja del empirismo, para convertirla en una ciencia pura. El dilema milenario planteado por el quinto postulado se debe, según Neumann, a que es el único de los cinco en el que interviene un espacio infinito, muy alejado de la experiencia y que vuelve a reencontrar su sitio en la realidad cuando se hace uso de las geometrías no euclídeas en campos de la física como la teoría de la relatividad general. El otro ejemplo es el del cálculo, punto de partida de lo que se puede considerar como matemática moderna, y que tuvo su origen en los esfuerzos del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) para conseguir calcular volúmenes de figuras con superficies curvas, lo que acabaría dando origen a la teoría de integrales.

Von Neumann puso un tercer ejemplo en el que se adentraba en los ámbitos de la lógica y de la filosofía, donde el empirismo puede parecer más ausente, como podría ser la teoría de conjuntos, que obligó a revisar los fundamentos de las matemáticas. En este terreno puramente abstracto, se puede esperar un rigor total en el que las matemáticas queden exentas de cualquier atisbo de duda en cuanto a la validez absoluta de las verdades que establecen. Sin embargo, el golpe asestado por los teoremas de Gödel dejó a las matemáticas sin la posibilidad de tener unos fundamentos lógicos consistentes. Ante esta renuncia, Von Neumann propuso que la ciencia matemática debería ser aceptada tal cual, como una realidad sobre la que investigamos, de la misma manera que aceptamos como realidad la existencia del electrón, lo que de algún modo le devuelve su carácter empírico. La tesis que sustentó, según sus propias palabras, era la siguiente:

> Muchas de las mejores inspiraciones matemáticas proceden de la experiencia y difícilmente es posible creer en la existencia de un concepto de rigor matemático absoluto, inmutable y disociado de toda experiencia humana.

Más tarde, Von Neumann llegó a afirmar que de no ser así, las matemáticas corrían el riesgo de entrar en un proceso de degeneración. Hizo una comparación entre las matemáticas y la física. La segunda se mueve en campos mucho más delimitados y concentrados, con menos subdivisiones, lo que tiene dos consecuencias importantes. La primera es que un físico teórico está potencialmente en condiciones de tener un conocimiento general que le permita abarcar al menos la mitad de todo lo que se sabe en su materia, mientras que un matemático profesional, como sería el caso del propio Von Neumann, a duras penas puede aspirar a estar al corriente de una cuarta parte de lo que se conoce —es indudable que actualmente esta proporción se ha visto reducida sensiblemente—. La segunda cuestión hace referencia a la propia naturaleza en el trabajo de investigación. Ante un reto, el físico se ve en la obligación de resolverlo, porque lo habitual es que suponga un freno a todo el cuerpo teórico y que, por tanto, es algo que

no se puede soslayar. En cambio, para el matemático las cosas son muy diferentes. Ante un problema frente al que no encuentra la solución, basta con dejarlo y pasar a otra cosa sin que por ello se resienta el edificio matemático. Es más, Von Neumann incluso afirmó que la elección de un problema concreto como objetivo se decide por cuestiones puramente estéticas.

Al final del artículo, Von Neumann advertía sobre los peligros de separarse excesivamente de las fuentes originales. La exagerada especialización a que quedan abocadas las matemáticas puramente abstractas con su constante alejamiento de la realidad de sus fuentes originales, puede llevarlas a un proceso de degeneración. En palabras del propio Von Neumann:

> En cualquier caso, siempre que se alcance este punto, me parece que el único remedio es el retorno rejuvenecedor a la fuente: la reinyección de ideas más o menos empíricas. Estoy convencido de que esta es una condición necesaria para conservar el frescor y la vitalidad de la matemática, y que esto seguirá siendo igualmente cierto en el futuro.

Actualmente se generan del orden de 200 000 teoremas de matemáticas cada año. Está claro que nadie puede abarcar más que una ínfima parte del conocimiento que ello supone. Lo que Von Neumann vaticinó se ha cumplido, por lo menos en su vertiente negativa.

Lecturas recomendadas

ASPRAY, W., *John von Neumann y los orígenes de la computación moderna*, Barcelona, Gedisa, 1993.

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

DAVIS, M.D., *Teoría del juego*, Madrid, Alianza Universidad, 1977.

HEIMS, S.J., *J. von Neumann y N. Wiener*, Barcelona, Editorial Salvat, 1986.

ISRAEL, G. y MILLÁN GASCA, A., *El mundo como un juego matemático*, Tres Cantos (Madrid), Nivola, 2001.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Universidad, 1999.

MOSTERÍN, J., *Los lógicos*, Madrid, Espasa Calpe, 2000.

NEUMANN, J. von, *El ordenador y el cerebro*, Barcelona, Antoni Bosch editor, 1999.

—: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, Madrid, Instituto de Matemáticas Jorge Juan, 1949.

ODIFREDDI, P., *La matemática del siglo XX*, Madrid, Katz Barpal Editores, 2006.

PEÑA, R., *De Euclides a Java: Historia de los algoritmos y de los lenguajes de programación*, Madrid, Nivola, 2006.

POUNDSTONE, W., *El dilema del prisionero*, Madrid, Alianza, 2006.

STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

Índice